D. FRANCISCI

MAVROLYCI,

ABBATIS MESSANENSIS,

Mathematici celeberrimi,

ARITHMETICORVM LIBRI DVO,

NVNC PRIMVM IN LVCEM EDITI.

Cum rerum omnium notabilium.

INDICE COPIOSISSIMO.

PER ME QVI SI RIPOSA,

E' N CIEL SI GODE.

CVM PRIVILEGIO.

Venetijs, Apud Franciſcum Franciſcium Senenſem.

M D LX X V.

Numeri lineares.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Radices	
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	Impares	
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	Pares	496. Et deinceps.
1		6				28				Perfecti	

Superficiales primi.

1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	Trianguli primi.
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	Quadrati primi.
0	2	6	12	20	30	42	56	72	90	parte altera longiores.
1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	Pentagoni primi.
1	6	15	28	45	64	91	120	15	190	Hexagoni primi.

Pyramides Primæ.

1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	Pyramides triangula prima.
1	5	14	30	55	91	140	204	285	385	Pyramides quadrata prima
1	6	18	40	75	126	196	288	405	550	Pyramides pentagona prima.
1	7	22	50	95	161	252	372	525	715	Pyramides hexagona prima.

Columnæ primæ.

1	6	18	40	75	126	196	288	405	550	Columna triangula prima	
1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	Columna quadrata prima.	Vel Cubi.
1	10	36	88	175	306	490	736	1053	1450	Columna pentagona prima	
1	12	45	112	225	395	637	960	1377	1900	Columna hexagona prima.	

Superficiales Secundi centrales.

1	4	10	31	19	46	64	85	109	136	Trianguli secundi.	
1	5	13	41	25	61	85	113	145	181	Quadrati secundi.	
1	6	16	51	31	76	106	141	181	226	Pentagoni secundi.	
1	7	19	61	37	91	127	169	217	271	hexagoni secundi.	æquianguli.
1	8	22	71	43	106	145	197	253	316	heptagoni secundi.	
1	9	25	81	49	121	169	225	289	361	Octogoni secundi.	

Pyramides secundæ centr.

1	5	15	34	65	111	175	260	369	505	pyramides triangula secunda
1	6	19	44	85	145	231	344	489	670	pyramides quadrata secunda
1	7	23	54	105	181	287	428	609	835	pyramides pentagona secunda
1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	pyramides hexagona secunda
1	9	31	74	145	251	399	596	849	1165	pyramides heptagona secunda
1	10	35	84	165	286	455	680	959	1330	pyramides octogona secunda

Columnæ secundæ centr.

1	8	30	76	155	276	448	680	981	1360	Columna triangula secunda
1	10	39	100	205	366	595	904	1305	1810	Columna quadrata secunda
1	12	48	124	255	456	742	1128	1629	2260	Columna pentagona secunda
1	14	57	148	305	546	819	1352	1953	2710	Columna hexagona secunda
1	16	66	172	355	636	1036	1576	2277	3160	Columna heptagona secunda
1	18	75	396	405	726	1183	1800	2601	3610	Columna octogona secunda

Solida Regularia in numeris.

1	9	35	91	189	341	559	855	1241	1729	Tetrahedra.	Vel pyramides
1	15	65	175	369	671	1105	1695	2465	3439	Octahedri	Et ijdem Cubi
1	33	155	427	909	1661	2743	4215	6137	8569	Icosahedri.	Et ijdem Dodecahedri.

Quadrati Quadratorum.

1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561	10000	Biquadrati.

FORMATIO NVMERORVM

Præcedentis Tabellæ.

RADICES formantur ab unitate, & per unitatis continuam additionem.

Impares ab unitate, per binarij continuam additionem. Vel ex duabus radicibus.

Pares a binario, & per binarij semper additionem, uel duplicando radices.

Trianguli primi, per continuatam radicum accumulationem. Siue multiplicando aggregatum collateralis radicis & unitatis in dimidium multitudinis radicum.

Quadrati primi ex ductu radicum in se, uel ex aggregatione successiua imparium ab unitate. Vel ex coniunctione trianguli collateralis cũ præcedenti, uel multiplicando aggregatũ collateralis imparis & unitatis in dimidium radicis.

Parte altera longiores ex ductu collateralis radicis in radicem immediatè præcedentem: siue ex aggregatione continuata parium: siue ex duplato triangulo pręcedenti: siue ex præcedenti quadrato cum sua radice.

Pentagoni primi ex coniunctione collateralis quadrati cum triangulo præcedenti.

Hexagoni primi ex quadrato collaterali, duploq; præcedẽtis trianguli: Vel ex pentagono coll. dictoq; triangulo: Vel ex ductu radicum in impares: Vel ex quadrato cum parte altera lungiori.

Pyramides triangulę primę ex successiua triangulorum aggregatione.

Similiter pyramides quadratę ex quadratorum. Pyramides pentagonæ ex pentagonorum; pyramides hexagonę ex hexagonorum aceruo construuntur.

Item pyramides quadratæ primæ fiunt ex coniunctione collateralis pyramidis triangulæ cum præcedenti.

Pyramides pentagonæ primæ ex collaterali quadrata pyramide cum præcedenti triangula pyramide.

Pyramides hexagonæ primæ ex quadrata pyramide collaterali cum duplo præcedentis triangulæ pyramidis. Vel ex pentagona pyramide collaterali, & triangula pyramide præcedenti.

Columæ nprimæ fiunt ex ductu suarum superficierum in radices: ut puta triangulæ ex radice in triangulos: & sic de cæteris.

Item columnæ triangulæ primæ sunt æquales pyramidibus pentagonis primis, singulæ singulis. Quod notatu dignum est.

Columnæ quadratæ primæ, siue cubi, fiunt ex ductu radicum in suos quadratos.

Siue ex columna triangula collaterali & præcedenti cũ suo triangulo.

Vel ex pyramide hexagona prima cum pyramide quadrata præcedẽti.

Vel ex aggregatione unius, deinde binorum, deinde trium, deinde qdatuor, & sic deinceps imparium.

Item columnæ pentagonæ primæ fient ex cubo collaterali cum columna triangula & triangulo præcedentibus.

Columnæ hexagonæ primæ item ex columna pentagona collaterali cũ pręcedenti triangula columna & suo triangulo.

Trianguli secundi fiunt ex triangulo primo præcedenti triplicato cum unitate.

Pro quadratis autem secundis, quadruplicetur dictus triangulus.

Pro pentagonis quintuplicetur. & sic deinceps pro sequentibus formis, adiecta unitate.

Item trianguli secundi fient ex triangulo primo collaterali & quadrato præcedenti.

Quadrati secundi ex quadrato collaterali & pręcedenti primis.

Pentagoni secundi ex pentagono collaterali & quadrato præcedenti primis.

Hexagoni secundi æquianguli ex collaterali hexagono primo cum quadrato pręcedenti. Vel ex quadrato collaterali & præcedenti & parte altera longiore collaterali. Vel ex parte altera longiore triplicato cum unitate.

Heptagoni ex hexagono secundo collaterali cum triangulo primo præcedenti.

Octogoni ex heptagono dicto collaterali cum triangulo præcedenti primi ord. Siue (quod notatu dignum est) ex collaterali impari in se multiplicato.

Pyramides secundę fiunt ex accumulatione continuata suarum superficierum, scilicet triangulæ triangulorum, quadratę quadratorum secundi ordini & sic deinceps.

Item pyramides secundæ triangulę fient ex pyramide triangula prima, & præcedenti pyramide quadrata.

Pyramides autem quadratæ secundę ex pyramide quadrata collaterali cum præcedenti primi ordinis.

Pyramides pentagonæ secundæ, ex pyramidæ pentagona prima, & pyramide quadrata pręcedenti prima.

Pyramides hexagonæ secundę ex pyramide hexagona prima & pyramide

mide quadrata præcedenti prima. Et sunt æquales cubis collateralibus, singulę singulis. quod mirum est.

Pyramides heptagonæ secundę, ex hexagona pyramide secunda collaterali cum pręcedenti triangula pyramide prima.

Pyramides octogonę secundę ex heptagona pyramide collaterali cum pręcedenti pyramide triangula prima.

Item unaquęq; dictarum pyramidum fit ex pyramide triangula primi ordinis multiplicata in numerum laterum, unà cum radice collaterali.

Columnę secundę fient ex multiplicatione suarum superficierum in radices collaterales, triangulæ scilicet triangulorum, quadratæ quadratorum. Et deinceps similiter.

Item omnis columna secundi ordinis, fiet ex columna eiusdem nominis in primo ordine cum pręcedenti cubo & quadrato coniuncta.

OMNIS COLVMNA TRIANGVLA Prima cum duplo sui trianguli, facit triplum suę pyramidis.

Omnis cubus cùm suo quadrato & triangulo, facit triplum suę pyramidis.

Omnis columna pentagona prima cum duplo quadrati collateralis, facit triplum suę pyramidis.

Omnis columna hexagona prima cum suo hexagono coll.&triangulo, facit triplum suæ pyramidis.

Omnis columna triangula secunda cum coll.quadrato & triangulo primis, facit triplum suę pyramidis.

Omnis columna quadrata secunda cum duplo coll. quadrati primi, facit triplum suæ pyramidis.

Omnis columna quadrata secunda cum duplo coll.quadrati primi, facit triplum suę pyramidis.

Omnis columna pentagona secunda cum duplo quadrati coll. primi, & cum triangulo præcedente primo, facit triplum suę pyramidis.

Omnis columna hexagona secunda cum hexagono secundo & impari collaterali, facit triplum suæ pyramidis.

Item eadem columna cum quadrato & hexagono primis facit triplum suę pyramidis.

Omnis columna septangula cum hexagono secundo & impari collateralibus, & cum triangulo primo pręcedenti facit triplum suę pyramidis.

Omnis columna octangula cum hexagono secundo & impari collateralibus, duploque trianguli pręcedentis primi, facit triplum suę pyramidis.

DE

DE SOLIDIS REGVLARIBVS.

TETRAHEDRVM seu Pyramis construitur ex unitate, cum quatuor radicibus præcedentibus, cum sexcuplo trianguli primi, uno retrorsum intermisso, accepti: & cum quadruplo pyramidis triangulæ secundæ præcedentis.

Cubus, construitur ex unitate cum octo radicibus præcedentibus, cũ duodecuplo trianguli primi, uno retrorsum intermisso, sumpti: cumq; sexcuplo pyramidis quadratæ secundæ præcedentis.

Octahedrum construitur ex unitate, secuplo radicis præcedentis, ex duodecuplo trianguli primi, uno intermisso, recepti, & ex octuplo pyramidis triangulæ secundæ præcedentis. Quod semper exit æquale cubo prædicto.

Icosahedrum construitur ex unitate, ex duodecuplo radicis præcedentis, ex uigecuplo trianguli primi, uno retrorsum omisso, accepti: & ex uigecuplo pyramidis triangulæ secundæ præcedentis.

Dodecahedrum construitur ex unitate, ex uigecuplo radicis præcedentis, ex trigecuplo trianguli primi, uno retrorsum intercidente, occurrentis: & ex duodecuplo pyramidis pentagonæ secundæ præcedentis. Quod semper inuenitur æquale Icosahedro dudum memorato.

Item cubus, aut octahedrum prædictum (sunt enim æquales) potest aliter construi. Nam dispositus imparibus ab unitate per ordinem, unitas faciet primum cubum prædictum: tres sequentes impares secundum; quinque sequentes impares tertium; deinde septem succedentes quartum; nouem quintum. Et sic deinceps in infinitum: impares sub multitudine impari successiue coaceruando.

Adhuc idem cubus, seu octahedrum producetur ex ductu imparis collateralis in quadratum secundi generis collateralem.

Et notandum quòd talis cubus siue octahedrus semper est pyramis triangula secundi generis in locis imparibus accepta.

Prætcrea non omittendum est, quòd ex successiua coaceruatione taliũ cuborum siue octahedrorum ab unitate per ordinem, constituuntur Quadrati quadratorum ab unitate seriatim receptorum. Qui quidem quadrati quadratorum, seu bisquadrati producuntur ex quadratis primis in se ductis. Quod sicut hactenus ignoratum, ita posthac iucundum scitu fiet speculatiuis ingenijs.

Deniq; cum his, neq; illud subticebo, quòd Tetrahedrum superius memoratum, est & cubus mixtus quidam tertij generis, qui conflatur ex binis semper proximis cubis primi ordinis, scilicet collaterali &

li & pręcedenti. Quemadmodum quadrati secundi ex duobus quadratis primis, collaterali & pręcedente coalescunt. Quod non minus erat admirandum.

Hęc omnia in tabella pręmissa per exempla singula notescunt, & in primo horum Arithmeticorum libello demonstrantur.

DE NVMERO PERFECTO.

PERFECTVS Numerus producitur ex multiplicatione ultimi in serie pariter parium ab unitate dispositorum, in totum aggregatum ipsorum, dum tamen tale aggregatum sit numerus primus, hoc est a nullo, pręterquàm unitate numeratus. Tales numeri semper inueniuntur in ordine triangulo & hexagonorũ primorum. In hoc numero perfecto partes integrant totum, ut ostendit Euclides in ultima Noni. Secunda conditio faciens numerum perfectum est imparitas. unde impar numerus perfectior, quam par: quoniam affinitatẽ habet cum Monade genitrice numerorum, quę repręsentat Deum, Mundum, Naturam, Solem, & quidquid unicum est. Tertia Conditio, est potestas. Vnde impares numeri, quorum potestas & officium est formare numeros quadratos, perfectiores sunt paribus, qui formant parte altera longiores. Rursum hexagoni ęquianguli sunt perfectiores, quàm impares communes: quoniam formant cubos. Quarta conditio, est forma. Vnde numeri ęquilateri perfectiores, quàm non ęquilateri. Sic quadratus perfectior, quàm altera parte longior. Et cubus perfectior, quàm solidus non ęquilaterus. Item Hexagonus ęquiangulus perfectior quàm hexagonus primus. Vnde prima conditio friuola est: quoniam nuda & expers est cęterarum fructuosiorum qualitatum. Verum hęc discussio posita est in postremo problematum Mechanicorum.

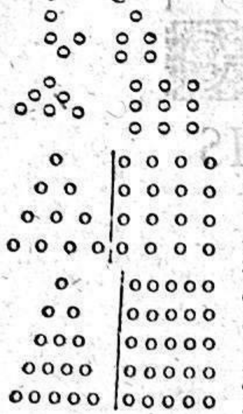
MAVROLYCI ABBATIS MESSANENSIS MATHEMATICI,

Arithmeticorum Liber Primus.

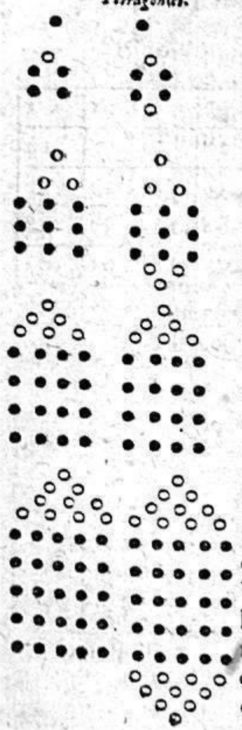
PROLOGOMENA.

CVM Euclides agat de planis, solidis, quadratis, cubisq; numeris: De cæteris alteriusmodi formis, ut triangulis, pentagonis, hexagonis & sequentibus tam superficialibus, quàm solidis; neque apud nostros, neq; apud Græcos (quem sciam) satis scripsit quispiam: nec ipse Pythagoras, siue Iamblicus, aut Nicomachus, à quibus Boëtius noster, quicquid de Arithmeticis tradidit, mutuatus est: Iordanus autem, meo quidem iudicio, melius utique egisset, si ab alijs omissa plenius tractasset, potiusquàm in repetendis ijs, quæ ab Euclide satis fuerant demonstrata, frustra insudasset: Nos igitur conabimur ea, quæ super hisce numerarijs formis, nobis occurrunt, exponere: multa interim faciliori uia demonstrantes, & ab alijs authoribus aut neglecta, aut non animaduersa supplentes. Sed iam à diffinitionibus inchoantes, reliqua commodius exequemur.

Trianguli. Quadrati.



Pentagoni. Hexagoni Tetragonici.



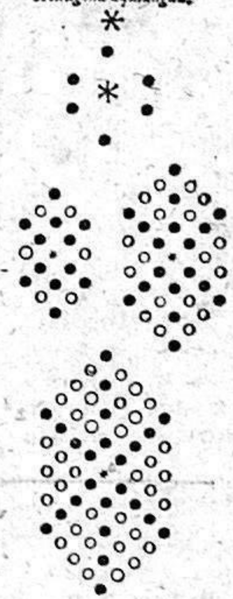
ARITHMETICORVM DIFFINITIONES.

Vnitas eſt principium & conſtitutrix omnium numerorum, conſtituens autem imprimis ſeipſam. Omnis igitur numerus aut eſt vnitas, quæ reſpondet puncto: quamq̃ punctum non habet partem in continuis, ſicut vnitas in diſcretis. Aut eſt linearis, qui reſpondet lineæ. Aut ſuperficialis, qui reſpondet ſuperficiei. Aut ſolidus qui ſolidum in geometricis imitatur. Poſt vnitatem itaque primus linearium numerorum eſt Binarius: ſicut linea finita duo extrema ſortitur. Primus ſuperficialium ternarius: ſicut Triangulum figurarum geometricarum prima eſt. Primus ſolidorum quaternarius: quoniam pyramis triangula in numeris, ſicut eadem in continuis ſolidis prima eſt. Sicut igitur monas pũcto: ita dias lineæ: Trias ſuperficiei, ac tetras ſolido aſſimilatur. Linearium numerorum, Par eſt quẽ Binarius metitur. Impar vero, qui pari vnitatem addit, vel minuit. Superficialium autem primi generis numerorum, alij trianguli ſunt; Alij quadrati, Alij pentagoni, Alij Hexagoni, & Hexagonorum, alij Tetragonici. alij Aequianguli, à forma ſcilicet, in qua diſponuntur, numeroq; angulorum aut laterum vocati. Radices numerorum ſunt q̃ ab vnitate, & ſecundum vnitatis cremẽtum ſucceſſiue accreſcunt. Triangulus numerus eſt, in primo genere, q ex aggregatione radicum ab vnitate acceptarum conſtitutus triangulã formam acquirit. Quadratus autem, qui ex radice in ſe ducta procreatur. Pentagonus verò, qui ex quadrato, & triangulo præcedenti coniunctis quinque lateram acquirit figuram. Hexagonus tandem, qui pentagono adhuc triangulũ adiungens, ſextum lucrifacit latus. Hæ itaque figuræ ex triangulis, & quadratis compaginantur. Nam Hexagonus æquiangulus ex vnitate & ſex multiplicato triangulo conſtruitur. Ex his ſuperficialibus formis totidem Pyramides, totidemque colũnę conficiuntur, qui ſolidi numeri merito vocantur. Nam Pyramis triãgula ex aggregatione triangulorum ab vnitate per ordinẽ ſumptorum fabricatur. Similiter & Pyramis quadrata, ex cumulo quadratorum: Pentagona, Pentagonorum: & Exagona, exagonorum ab vnitate continuatim ſumptorum erigetur. Vnde, & duplex erit hexagona Pyramis, ſcilicet à ſuis ſingulæ hexagonis conſtructæ. Columna verò triangula ex ductu radicis in ſuum triangulum. Quadrata quę cubus vocatur, ex ductu radicis in ſuum quadratum. Pentagona, ex ductu radicis in Pentagonum. Et hexagona vtriuſque ſpeciei ex radice in

Radices.	Pares.	Impares.
1.	0.	1.
2.	2.	3.
3.	4.	5.
4.	6.	7.
5.	8.	9.
6.	10.	11.
7	12.	13.
8.	14.	15.
9.	16.	17.
10.	18.	19.

in hexagonum multiplicata procreabitur. Sunt & numeri parte altera longiores, quorum quilibet fit ex ductu collateralis radicis in pręcedentem. His ita ſe habẽtibus, dicendum eſt de eorum proprietatibus & colligantijs.

Hexagone æquianguli.



SCHOLIVM.

Ab his propagantur quincuplices Pyramides, & totuplices columnæ, in quibus omnibus poſitio vnitatum, aut triangularem, aut tetragonam ſeruat formam. Sed hexagonus æquilaterus hìc reponi dignus eſt viſus, propter colligantiam, quam cum primo hoc genere formarum ſeruat: Reponetur & in ſecundo mox genere, quandoquidem conſtruitur ex centrali vnitate, & ex triangulo in laterum numerum ducto, hoc eſt ſexcuplicato: & ipſius tam pyramis, quàm columna ſemper habet pro axe linearem numerum, ſiue radicem collateralem ex centralibus ſcilicet vnitatibus ſuperficierum compoſitam. Quæ omnia hìc in tabella per numerarios characteres, tam ad diffinitionum, quàm ad demonſtrandorum exempla exarabimus, ab vnitate vſque ad denarium procedere contenti.

FORMÆ NVMERARIÆ PRIMI GENERIS.

Radices.	Pares.	Impares.	Trianguli.	Quadrati.	Parte altera longiores	Pentagoni.	Hexagoni pi.	Pyr^des Δla.	Pyr^des quadratæ	Pyramides pẽtag. colũnę Δlæ	Pyramides hexag. primæ.	Cubi colum. quadratæ pyramides hexag. æquiangulæ.	Columnæ pentagonæ.	Columnæ hexagonæ primę.	Hexa. æquãguli.	Columnæ hexagonæ æquiãgulæ.
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	3	4	2	5	6	4	5	6	7	8	10	12	7	14
3	4	5	6	9	6	12	15	10	14	18	22	27	36	45	19	57
4	6	7	10	16	12	22	28	20	30	40	50	64	88	112	37	148
5	8	9	15	25	20	35	45	35	55	75	95	125	175	225	61	305
6	10	11	21	36	30	51	66	56	91	126	161	216	306	396	91	546
7	12	13	28	49	42	70	91	84	140	196	252	343	490	637	127	889
8	14	15	36	64	56	92	120	120	204	288	372	512	736	960	169	1352
9	16	17	45	81	72	117	153	165	285	405	525	729	1053	1377	217	1953
10	18	19	55	100	90	145	190	220	385	550	715	1000	1450	1900	271	2710

PROPOSITIO PRIMA.

QVOT vnitates habet numerus quilibet, totum in ordine radicum locum ſortitur. Et è contrario, quotum in radicibus locum obtinet quiuis numerus, tot quoque complectitur vnitates. Nam radices ab vnitate exordium capientes per ſingulos locos ſingulas acquirunt vnitates. Quapropter millenarius numerus, quoniam ex mille conſtat vnitatibus, milleſimus eſt in ordine radicum: Et viciſſim numerus, qui milleſimum in radicibus locum ſortitur, mille comprehendet vnitates, hoc eſt millenarius ipſe numerus erit. Et hoc eſt quod proponitur demonſtrandum.

2a *Omnis datus numerus inuenitur in ordine radicum.* Eſto datus numerus a. quicunque ſit, aio quòd a. numerus inuenitur in ordine radicum omnino. Habeat enim a. quotuis vnitates, vtpute mille. iam enim per præcedentem a. numerus milleſimum obtinebit in radicibus locum. Quod eſt propoſitum.

3a *Radices ſingulæ duplicatæ conſtituunt pares ſingulos per ordinem.* Nam talia dupla menſurantur à binario: quandoquidem per binarium multiplicantur: & ideo per diffinitionem ſunt ipſi pares numeri; quorum primus ſemel, ſecundus bis, tertius ter; & ſic deinceps à binario menſurantur.

4a *Impares ab vnitate per binarij appoſitionem ſucceſſiue fiunt.* Nam vnitas binario appoſita, per differen. facit imparem, ſcilicet ternarium: Sed per præmiſſam pares numeri propagantur à binario per binarij crementum: & per differen. impares addunt paribus ſinguli ſingulis vnitatem: Igitur impares propagabuntur à ternario per idem binarij crementum (vt ſinguli ſingulos impares vnitate ſemper excedant.) Quod eſt propoſitum.

5a *In ordine radicum impares & pares alternatim & inuicem ſuccedunt.* Nam, per præmiſſam, impares ab vnitate per binarium creſcunt; quo fit vt in radicibus, vnitas, & vno ſemper intermiſſo numero, ſequẽtes ſint impares: per antepmiſſam verò, pares à binario per binarium creſcunt; quare in radicibus binarius, & vno ſemper intermiſſo, ſequentes ſunt pares. Sic ergo fit, vt impares, in imparibus, pares ſemper in

locis

locis, paribus radicum inueniantur alternatim, ſicut proponitur.

Omnis radix cum radice præcedenti, facit ſibi collateralem imparem: cum ſequenti verò ſequentem. Nam binarius cum vnitate facit ternarium: cum ternario autem iunctus, facit binario maiorem: & ideo imparem ſequentem ſcilicet 5. per quartam præmiſſam. Rurſus, cùm ternarius coniunctus cum binario, faciat quinarium, imparem ſibi collateralem: Iam idem cum quaternario radice ſequenti faciet binario maiorem, hoc eſt, imparem ſequentem, per quartam præcedẽtem, qui ſeptenarius eſt. Eodemque modo in infinitum, ſicut propoſitio concludit. 6

Omnis radix multiplicata in radicem ſequentem, producit duplum trianguli ſibi collateralis. Exempli gratia, ducatur quaternarius in ſequentem radicem, ſcilicet quinarium: & producuntur 20. Aio, quòd 20. duplus eſt ad triangulum ipſi quaternario collateralem. Sumantur enim ab vnitate ad quaternarium radices: quibus applicentur totidem & ordine præpoſtero ab vnitate radices, ſingulæ ſingulis: ſic enim fiet vt creſcentes cum decreſcentibus ſinguli ſingulis coniuncti numeri faciant quatuor ſummas æquales: hoc eſt quatuor quinarios. quare earum aggregatum erit planus numerus, qui fit ex ductu quaternarij in quinarium: & idcirco 20. erit talis planus. Duplus autem eſt planus ipſe ad triangulum quaternarij: quandoquidem, per diff. talis triangulus eſt aggregatum vnius dictorum ordinum: quod eſt dimidium plani: Igitur 20. duplus erit ad triangulum quaternarij. Et ſimiliter in omni caſu id quod proponitur demonſtrabimus. 7

1 — 4
2 — 3
3 — 2
4 — 1

Omnis triangulus duplicatus, efficit numerum parte altera longiorem ſequentem. Exempli gratia, triangulus quarti loci, eſt denarius. Aio, quòd 10. duplicatus efficit parte altera longiorem quinti loci. Nam per diff. talis parte altera longior producitur ex radice collaterali in præcedentem: ſcilicet ex 5. in 4. Sed per præmiſſam ex ductu 4. in 5. fit duplum trianguli quarti: Ergo tale duplum æquale eſt, parte altera longiori quinti loci. quod eſt propoſitum. 8

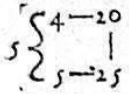
$5 \begin{cases} 4 \begin{cases} 10 \\ 10 \end{cases} \\ 4 - 20 \end{cases}$

Omnis quadratus cum radice ſua coniunctus, conficit ſequentem parte altera longiorem. Exempli gratia, quadratus quarti loci eſt 16. eiuſque radix 4. Aio, quòd ſexdecim cum quatuor conficit parte altera longiorem quinti loci. 9

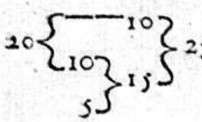
$4 \begin{cases} 4 - 16 \\ 5 - 20 \end{cases}$

 Nam

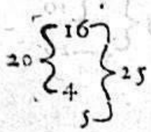
Nam per diffinitionem 4. multiplicatus in 4. producit quadratum ſuum ſcilicet 16. Et idem 4.ductus in 5. ſequentem radicē, producit parte altera lōgiorem quintum, ſcilicet 20.Sed talia duo producta differunt quaternario : quoniam multiplicantes differunt vnitate. Igitur 16.cum 4.efficit 20. hoc eſt,quadratus cum radice parte altera longiorem quintum. quod fuit demonſtrandum.



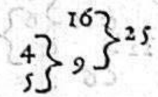
10^{a} *Omnis parte altera longior cum radice collaterali coniunctus, conflat collateralem quadratum.* Exempli gratia: Parte altera longior quinti loci eſt 20. Aio,quòd 20.cum 5. facit quadratum quintum. Nam, per diffi.talis parte altera longior fit ex 4.in 5.dictus verò quadratus fit ex 5.in ſe. Sed talia producta differunt quinario multiplicante: quoniam multiplicati differunt vnitate. Igitur 20. cum quinario conficit reliquum productum,ſcilicet quadratum quinarij : quod fuit demonſtrandum.



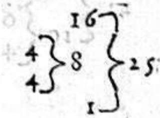
11^{a} *Omnis triangulus cum præcedenti triangulo coniunctus perficit quadratum ſibi collateralem.* Exempli gratia: Triangulus quintus ſcilicet 15. cum triangulo præcedenti ſcilicet 10. perficit quadratum quintum. Nam, 15. per diff. trianguli conſtat ex pręcedenti $\triangle^{lo}$ & radice 5.Igitur aggregatum taliū duorum triangulorum cōſtat ex tali radice,& duplo $\triangle^{li}$ præcedentis,hoc eſt,ex 5. & duplo ipſius 10. Sed duplum ipſius trianguli 10.per antepræmiſſam eſt parte altera lōgior quintus: Ergo dictum triangulorum aggregatum,æquale erit aggregato ex parte altera longiore quinto, & ex radice quinta. Per præcedentem autem, parte altera longior quintus cum radice 5^{a} conflat quintum quadratum: Igitur dictum triangulorum 15. & 10. aggregatum, perficit Quadratum quintum: quod eſt propoſitum.



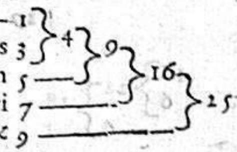
12^{a} *Omnis quadratus cum radice ſua,& cum radice ſequenti coniunctus,conſummat quadratum ſequentem.* Exempli gratia: Quadratus quarti loci ſcilicet 16. cum radice ſua ſcilicet 4. & cum radice ſequenti 5.compoſitus,conſummat quadratū ſequentis loci ſcilicet 25. Nam per nonam præcedentem, quadratus quartus cum radice ſua coniunctus, efficit quintum parte altera longiorem: per decimam verò præmiſſam, quintus parte altera longior conflet iunctus cum quinta radice, quintum quadratum. Igitur quartus quadratus cum 4^{a} & 5^{a} radicibus acceptus conficit $\square^{tu}$. quintum : ſicut proponitur.



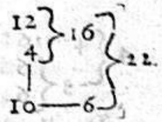
Omnis quadratus cum impari ſequente coniunctus, conſtituit quadratum ſequentem. Exempli gratia: Quartus quadratus ſcilicet 16.cum impare quinti loci,ſcilicet cum 9. coniunctus,efficiet quintum quadratum. Nam per ſextam præmiſſarum, radix quarta cum quinta componunt imparem quintum : cumque per præcedentem, quadratus quartus, cum quarta & quinta radicibus, pariter ſumptus, efficiat quadratum quintum, ſequitur ; vt idem quadratus quartus cum impare quinto,hoc eſt 16.cum 9.conſtituat quadratum quintum ſcilicet 25. ſicut concludit propoſitio. 13^{a}



Omnis quadratus cum duplo ſuæ radicis & vnitate coniunctus conſtruit quadratum ſequentem. Exempli gratia: Quartus quadratus ſcilicet 16. cum duplo ſuæ radicis, hoc eſt, cum 8. & vnitate coniunctus efficit quadratum ſequentem. Nam per 3^{a} huius, duplus radicis quartæ, eſt par quinti loci: cui ſi addatur vnitas, fit per diff.impar quintus. Igitur talis duplus cum vnitate,eſt impar quintus. Verùm,per præcedentem,quartus quadratus cum quinto impare conſtituit $\square^{tu}$ ſequentem.Igitur & quartus quadratus cum dicto duplo & vnitate coniunctus : hoc eſt, 16.cum 8.& 1.conſtruit quadratum quintum ſcilicet 25.quod eſt propoſitum. 14^{a}



Ex aggregatione imparium numerorum ab vnitate per ordinem ſucceſſiuè ſumptorum, conſtruuntur quadrati numeri continuati ab vnitate, ipſiſq; imparibus collaterales. Nam per antepræmiſſam, vnitas imprimis cum impari ſequente facit quadratum ſequentem ſcilicet, 4. Et ipſe 4. quadratus ſecundus, cum impari tertio ſcilicet 5. facit quadratum tertium,ſcilicet 9.Itemque 9. quadratus tertius cum impari quarto ſcilicet 7. facit quadratum quartum, ſcilicet 16. & ſic deinceps in infinitum, ſemper 13^{a} repetita propoſitum demonſtratur. 15^{a}



Omnis Pentagonus conſtituitur ex triangulo & parte altera longiore collateralibus coniunctis. Nam per diffinitionem ipſe, exempli gratia, pentagonus quartus, 22. fit ex $\square^{to}$ 4^{o} & $\triangle^{lo}$ tertio coniunctis,hoc eſt ex 16.& 6.Sed per 10^{a} huius, parte altera longior quartus, ſcilicet 12. cum radice quarta, ſcilicet 4.conficit $\square^{tu}$ quartum.Et per diff.trianguli,triangulus quartus conſtat ex $\triangle^{lo}$ 3^{o} & ex radice quarta. Igitur & Pentagonus quartus conſtituetur ex parte altera longiore quarto,ſcilicet 12.& ex $\triangle^{lo}$ quarto ſcilicet 10. ſicut proponitur demonſtrandum. 16^{a}

17 *Omnis item pentagonus construitur ex triplo præcedentis trianguli, & ex collaterali radice, coniunctis.* Exempli gratia: pentagonus quartus. scilicet 22. fit ex triplo tertij Δ^{li}, scilicet ex 18. & ex radice 4^{a} .s.4. Nam per diffinitionem, pentagonus quartus scilicet 22. fit ex Δ^{lo} præcedenti tertio & ex quadrato quarto. Quadratus autem quartus scilicet 16. per 11^{a} huius, constat ex Δ^{lo} tertio 6. & ex Δ^{lo} quarto 10. coniunctis: & Δ^{lo} quartus ex diff. Δ^{li}, constat ex Δ^{lo} tertio, & ex radice 4^{a} coniunctis. Igitur & Pentagonus 4^{9} constabit ex tribus triangulis tertijs, & ex radice quarta: quod est propositum. Vel sic: q̄m per præcedentem, Pentagonus 4^{9} constabat ex parte altera longiore quarti loci, & ex Δ^{lo} quarto: & per 8^{a} huius, parte altera longior 4^{9} æquiualet duobus triangulis tertijs: & Δ^{lo} quartus æquiualet Δ^{lo} 3^{o} & radici quartæ: iam & pentagonus 4^{9} æquiualebit tribus Δ^{lis} tertijs & radici $4^{æ}$ quod est propositum.

$22\left\{\begin{array}{l}16\left\{\begin{array}{l}6\\6\\4\end{array}\right\}10\\6\end{array}\right.$

$22\left\{\begin{array}{l}12\left\{\begin{array}{l}6\\6\end{array}\right.\\10\left\{\begin{array}{l}6\\4\end{array}\right.\end{array}\right.$

18 *Omnis hexagonus primus constat ex præcedenti triangulo, & insuper ex ijs omnibus, ex quibus collateralis pentagonus constare ostensus est.* Nam, cùm per diffinitionem pentagonus, vnà cum præcedenti triangulo constituat collateralem hexagonum, sequitur vt hexagonus ipse constet ex dicto iam triangulo, & ex iis simul, ex quibus per duas præcedentes, constare ostensus est Pentagonus. Sicut proportio præsens concludit.

19 *Omnis hexagonus fit ex quadrato collaterali, duploq; præcedentis trianguli.* Exēpli gratia, hexagonus primus quarti loci scilicet 28. fit ex quadrato quarto, scilicet 16. & duplo præcedentis trianguli, scilicet 6. Nam per diffini. hexagonus constat ex pentagono collaterali, & ex præcedenti Δ^{lo}. Pentagonus autem ex quadrato, & ex præcedenti triangulo. Igitur hexagonus constabit ex quadrato, & ex duobus præcedentib. triangulis: quod est propositum.

$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}16\\6\end{array}\right\}22\\6\end{array}\right\}28$

20 *Omnis radix ducta in imparem collateralem producit hexagonum primum collateralem.* Exempli gratia: radix quarta scilicet 4. multiplicans quartum imparem, scilicet 7. facit collateralem hexagonum primum, scilicet 28. Nam radix 4. in se ducta, facit quadratum 4^{u} scilicet 16. Et eadem radix 4. in præcedentem radicem scilicet 3. ducta facit per 7^{a} huius, duplum trianguli tertij, scilicet 6. Sed per præcedentem, tale $\square^{tu}$ cum duplo talis trianguli perficiunt simul hexagonum primum 4^{i} loci. Ergo radix 4. ducta in se, & ducta in 3. hoc est ducta

$4\left\{\begin{array}{l}4—16\\3\left\{\begin{array}{l}6\\6\end{array}\right.\end{array}\right.$

ducta in 7. 4^{u} imparem, per 6^{a} huius, procreabit hexagonum primum 4^{i} loci; quod est propositum.

Si ex radicibus ab vnitate dispositis sumantur tres, vel quinq; 21
vel septem, vel sub quauis impari multitudine ab vnitate continuati numeri: tunc illorum aggregatum æquale erit ei, qui fit ex ductu medij in postremum. Exempli gratia: capiantur septem 1.7
radices sic 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. quorum medius est 4^{9} scilicet 4. 2.6
Aio igitur, q̄ horum 7. numerorum aggregatum æquale erit 3.5
ei quod fit ex multiplicatione medij scilicet 4. in postremum 4.4—7—28.
scilicet 7. q̄ sic ostenditur. Associentur propositis radicibus 5.3
totidem singuli singulis æquales, sed ordine præpostero, ap- 6.2
plicati numeri: sic fiet, vt crementa decremētis compensata 7.1
faciant combinationes singulas æquales: vtque bini medij ab extremis æquidistantes scilicet 4. & 4. sint inuicem æquales. Quare congeries totalis amborum ordinum erit planus numerus, qui fit ex ductu octonarij in septenarium: quæ sunt latera plani. Igitur & summa vnius ordinis, quæ dimidiū est totalis cumuli producetur ex 4. in 7. hoc est ex medio numerorum in postremum. Quod fuit demonstrandum.

Omnis radix media inter vnitatem & imparem in ordine ra- 22
dicum, multiplicata in talem imparem, producit triangulum imparis eiusdem collateralem. Exempli gratia, capiantur, sicut
in præcedenti, quotuis imparis $mult^{nis}$ radices ab vnitate cō- 1
tinuatæ 1.2.3.4.5.6.7. septem scilicet. Aio, quòd in his radix 2—3—6.
æqualiter remota ab vnitate & impari: vt 2. qui æquidistat 3
ab vno, & a 3. multiplicata in 3. producit collateralem ipsius 3. triangulum. Nam, per præcedentem, 2. qui medius est ipsorum 1.2.3. trium scilicet ab vnitate radicum, ductus in
postremum, scilicet 3. producit aggregatum ipsorum 1. 2. 3. 1
Sed tale aggregatum, per diffinitionem, est triangulus colla- 2
teralis postremæ radicis 3. Igitur 2. ductus in 3. producit Δ^{lu} col 3—5—15
lateralem ipsius imparis scilicet 6. quod est propositum. Item 4
3. radix æquè remota ab vnitate, & à quinario ducta ī quinq;, 5
producit 15. triangulum. s. collateralem quinarij: quia. s. per
præcedentem procreat aggregatum ex ipsis 1. 2. 3. 4. 5. quod 1
est ipse triangulus, sicut proponitur. Adhuc 4. radix æquè 2
distans ab vnitate & à 7. in 7. ipsum multiplicata generat 28. 3
Δ^{lu} .s. collateralē ipsius septenarij: quandoquidem per præce- 4—7—28.
dentem, producit aggrauatum ex ipsis 1. 2. 3. 4. 5.6.7. ipsum 5
videlicet triangulum. Et sic deinceps, arguendo per præceden- 6
tem, & per diff. trianguli confirmatur propositum. 7

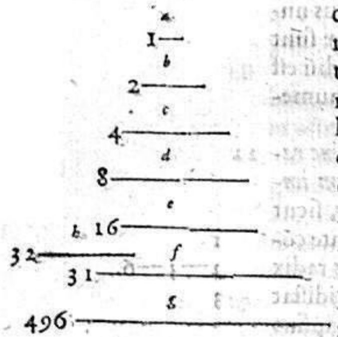
Hexa-

23ª *Hexagoni primi ab vnitate continuati per ordinem, sunt & trianguli numeri locorum imparium.* Nam per 20ª huius, radices singulæ in singulos impares multiplicatæ, producunt per ordinem hexagonos ipsos. At per præcedentem, radices singulæ in singulos item impares ductę, procreant triangulos imparium collaterales per ordinem. Igitur & trianguli imparium locorum sunt & hexagoni per ordinem continuati: sicut demonstrandum proponitur.

COROLLARIVM.

Vnde manifestum est, quòd omnis hexagonus tetragonicus est & triangulus numerus.

24ª *Omnis numerus perfectus est hexagonus tetragonicus siue primus.* Hoc nos sic demonstrabimus. Exponantur ab vnitate continuati numeri pariter pares, hoc est, in proportione continua dupla a. b. c. d. e. quorum aggregatum sit numerus primus, qui sit f. & ex e. postremo in f. producatur g. qui per vltimam noni elementorum Euclidis, erit numerus perfectus. Ostendendum igitur est, quòd g. hexagonus est, non æquiangulus, hoc pacto. Sit ipsius e. duplus ipse h. Et tunc si ab ipso b. secundo, & ab ipso h. dematur primus, scilicet vnitas, erit per penultimam noni prædicti, sicut residuum ipsius b. ad vnitatem, sic residuum ipsius h. ad aggregatum ipsorum a b c d e. Sed residuum ipsius b. est vnitas, & perinde æqualis vnitati: Igitur & residuum ipsius h. æquale erit aggregato ipsorum a b c d e. hoc est, ipsi f. Verùm si ab ipso h. duplo ipsius e. & perinde numero pari subtrahatur vnitas, iam superest numerus impar collateralis ipsius e. in radicibus: Ergo talis impar est ipse f. Quare per 20ª huius, e. radix multiplicans ipsum f. collateralem imparem, generat hexagonum sibi collateralem. Fuit autem tale productum ipse numerus g. omnino igitur & g. numerus hexagonus est. quod demonstrandum fuit.

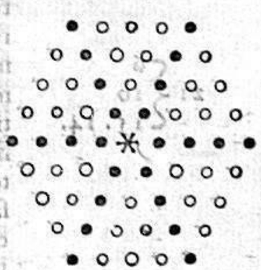


25 *Omnis numerus perfectus est triangulus.* Nam per præcedentem, omnis numerus perfectus est hexagonus primus. Per corollarium autem antepræmissæ, omnis hexagonus talis est, & triangulus: Igitur & omnis numerus perfectus est triangulus, sicut propositio concludit.

26 *Omnis radix sexcuplicata & cum vnitate, cumque sexcuplo præcedentis trianguli coniuncta, consummat hexagonum æquiangulum sequentem.* Exempli gratia: Sumatur 4. qui quarta radix

est; & tertius triangulus, scilicet 6. Aio, quòd 4. sexcuplicatus scilicet 24. cum vnitate, & cum sexcuplo ipsius 6. scilicet 36. coniunctus, conficit hexagonum æquiangulum sequentem, scilicet 61. Nam radix quarta cum tertio triangulo, per dif. △ˡⁱ, conficit quartum triangolum. Igitur sexcuplum quartæ radicis cum sexcuplo tertij △ˡⁱ. simul efficiunt sexcuplum quarti trianguli. Quare vnitas cum sexcuplo 4ᵉ radicis, & sexcuplo tertij trianguli simul, sunt æqualia aggregato ex vnitate & sexcuplo quarti trianguli. verùm tale aggrauatum, per diffinitionem ipsius hexagoni, constituit ipsum hexagonum quintum. Ergo hexagonus quintus construitur ex vnitate, sexcuplo radicis quartę, & sexcuplo tertij △ˡⁱ. quod est propositum.

1 — } 61
6 { 4 — 24 ; 6 — 36 } 60



Omnis parte altera longior triplicatus & cum vnitate coniunctus, conficit hexagonum æquiangulum collateralem. Exempli gratia: Quintus parte altera longior est 20. huius triplum scilicet 60. cum vnitate efficit quintum, de quo loquimur, hexagonum scilicet 61. Nam per diffi. Hexagonus quintus constat ex vnitate & sexcuplo 4ⁱ trianguli, scilicet 10. Quintus autem parte altera longior, per 8ª huius, constat ex duobus quartis triangulis. Sequitur ergo, vt sex quarti trianguli æqualeant tribus parte altera longioribus quinti loci: vtque hexagonus quintus conflетur ex tribus parte altera longioribus & ex vnitate: sicut proponitur. 27

1 } 61
3 — 20 — 60 } 61
6 — 10 — 60 } 61
1 } 61

COROLLARIVM.

Vnde manifestum est, quòd omnis quadratus cum radice sua coniunctus & inde triplicatus, ac mox cum vnitate positus, conficit hexagonum æquilaterum sequentem. Nam per nonam huius, quadratus cum radice sua æqualet parte altera longiori sequenti. vnde corollarium constat ex præmissa.

In tribus numeris æquali excessu crescentibus, congeries extremorum æqualis est duplo medij. Exempli gratia, tres numeri 3. 5. 7. binario crescentes sint. Aio quòd extremi scilicet 3. cum 7. faciunt duplum ipsius 5. Nam, quanto 3. minor est quàm 5. tanto 7. maior, quæ 5. per hypothesim. Excessus itaque binarij resarcit eiusdem defectum; & perinde excedens cum deficiente, hoc est tertius cum primo faciunt duplum medij: quòd est propositum. 28

10 — 2 — 5 { 3 ; 7 } 10

In tribus

29 *In tribus triangulis continuatis in ordine triangulorum, congeries extremorum vnitate excedit duplum medij.* Exempli gratia, tres capiantur continui trianguli, vtputa tertius, quartus, & quintus ſcilicet 6.10.15. Aio, quòd extremorum 6.& 15.vnitate ſuperat duplum medij ſcilicet ipſius 10. Nam in his quartus Δ^{lus} ſua radice excedit tertium, hoc eſt, quaternario: Quintus autem quartum quinario, ſicut ratio diffinitionis poſtulat. Minuatur vnitas de quinto: & ſupereſt 14. fietque vt 6.10.14. æquali cremento procedant: ſcilicet quaternario creſcentes. Quare, per pręmiſſam 6.cum 14.duplum faciũt ipſius 10. Igitur 6.cum 15.vnitate duplum prædictum excedẽt. & ſimiliter hoc ipſum in omnibus tribus continuatis Δ^{lis} oſtendam: ſicut demonſtrandum proponitur.

21 { 6
10
15. 14.

PROPOSITIO 30ª.

Omnis triangulus quadruplicatus & cum vnitate coniunctus, efficit aggregatum collateralis & ſequentis quadratorum. Exempli gratia: triangulus 4ᵘˢ, ſcilicet 10. quadruplicatus cum vnitate facit 41. aggregatum ſcilicet quadratorum quarti & quinti. Applico enim Δ^{lo} propoſito præcedentem Δ^{lu} & ſequentem, ſcilicet tertium & quintum ſic 6.10.15. atque ita per 11ª propoſitionem huius, conſtabit, quòd quartus quadratus fiet ex congerie ipſorum 10.& 6.quarti & tertij triangulorum: Et ſimiliter, quòd quintus quadratus fiet ex cumulo ipſorum 15.& 10.quinti & quarti Δ^{lorum}. Quo fit, vt aggregatum talium quarti & quinti quadratorum, quod eſt 41.conſtet ex congerie Δ^{lorum} extremorum.& ex duplo medij: Sed per præcedentem, congeries extremorum æquiualet duplum medij & vnitatẽ. Igitur aggregatum ex quarto & quinto quadratis conſtabit ex quadruplo Δ^{li} medij & ex vnitate. Hoc eſt, ipſe Δ^{lus} medius, quartus in hoc caſu, ſcilicet 10. quadrupliciter cum vnitate conficiet aggregatum ex quarto, & quinto quadratis 25. ſcilicet & 16. ſicut demonſtrandum proponitur.

6 } 16 } 41
10
15 } 25

PROPOSITIO 31ª.

Omnis quadratus cum præcedenti quadrato, & cum ſibi collaterali parte altera longiori coniunctus, conſummat hexagonũ æquiangulum ſibi collateralem. Exempli gratia: Quadratus quintus eſt 25. quartus præcedens 16. parte altera longior quintus 20. Aio, quòd horum aggregatum conſummat hexagonum æquiangulum quintum. Nam, per præmiſſam, aggregatum ex quinto & quarto quadratis, æquiualet quadruplo trianguli quarti cum vnitate iuncto. Per octauam autem huius, parte altera longior quintus æquiualet duplo trianguli quarti. Ergo aggregatum ex quinto & quarto quadratis, & ex parte altera longiori quinto, æquiualet ſexcuplum trianguli quarti & vnitatem. verùm tale ſexcuplum cum vnitate cõſtituit hexagonum æquiangulum quintum, ſicut eius diffinitio ſupponit: Igitur hexagonus æquilaterus quintus conſummabitur ex aggregato quinti & quarti quadratorum, & quinti parte altera longioris: quod fuit oſtendendum. Similiter in omni caſu procedam propoſitum demonſtrans.

16 } 41 } 61
25
10—20

PROPOSITIO. 32ª.

Omnis hexagonus tetragonicus cum præcedenti quadrato coniunctus complet hexagonum æquiangulum ſibi collateralem. Nam, niſi diffinitiones oblitus es, Hexagonus tetragonicus ſiue primi generis vocetur, conſtituitur ex quadrato collaterali, & ex duplo Δ^{li} præcedentis: Exempli gratia hexagonus talis quinti loci, ſcilicet 45. fit ex quinto quadrato 25. & ex duplo trianguli quarti 10. Sed tale duplum, per octauã huius, eſt parte altera longior quintus ſcilicet 20. ergo hexagonus tetragonicus quintus æquiualet aggregatũ ex quinto quadrato, & quinto parte altera longiore. verùm per præmiſſam quintus quadratus, cum quarto quadrato & cum quinto parte altera longiore conſummat hexagonum æquilaterum quintum. Igitur hexagonus tetragonicus quintus cum quadrato quarto conſtabit hexagonum æquiangulum quintum: quod fuit demonſtrandum. Et ſimiliter in omni caſu demonſtrabo propoſitum.

45 { 10 } 20 } 61
10
25
16

PROPOSITIO. 33ª.

Sunt plerique numeri quadrati, qui coniuncti quadratum numerum faciunt. Sumatur enim quilibet in ordine imparium quadratus: namque his cum præcedenti quadrato in ordine quadratorum ſumpto cõiunctus, per 13ª huius, quadratum conficit. Exempli gratia. 9. quadratus, quintus in ordine imparium, cum quadrato quarto 16. conficit 25. quadratum quintum. Item 25. quadratus, tredecimus impar cum duodecimo quadrato ſcilicet 144. coniunctus, conficit 169. quadratum videlicet tredecimum. Idemque ſemper fit in oĩ quadrato impari. Conſtat ergo per 13ª veritas propoſiti. Et aliter ſic: ſumantur duo inæquales quadrati numeri, aut ambo pares, aut ambo impares, ſiue duo plani ſimiles a b.& b c. qui cũ parem numerum faciant, iam totius a c. dimidius par erit.

9 } 25
16

25 } 169
144

a b d c
9 5 17
e
225
f
64
g
289

par erit. Eſto igitur ipſe dimidius a d. qui iam excedit ipſum a b. numerum ipſo b d. ducatur numerus a b. in ipſum b c. & fiat e. igitur quadratus numerus erit e. per primam noni elemẽtorum. Quandoquidem ex ductu quadratorum ſeu ſimilium planorum fit. Sit deinde $\square^{tus}$ ipſius b d. ipſe f. numerus. Ac deniqne ipſius a d. vel d c. quadratus ipſe g. numerus. Sic enim, per quintam ſecundi elementorum ad numeros redactam, conſtabit quòd ipſorum, e f. quadratorum agregatum eſt æquale ipſi g. quadrato. Cõſtat ergo rurſus propoſitũ.

PROPOSITIO 34ª.

Omnis pyramis triangula cum præcedenti pyramide triangula coniuncta, conſtruit pyramidem quadratam ſibi collateralem. Nam facilitatis gratia, capiatur pyramis quinta conſtans per diff. ex quinque triangulis. 1. 3. 6. 10. 15. & pyramis quarta cõſtans ex 4^{or} triangulis. 1. 3. 6. 10. Aio, quòd horũ aggregatum facit pyramidem $\square^{ta}$ quinta. Nam per 11^{a} huius, ſecundus triangulus ab vnitate ſcilicet 3. cum vnitate facit 2^{m} quadratum ſcilicet 4. Item 2^{9} & 3^{9} trianguli, ſcilicet 3. & 6. faciunt $3^{ũ}$ $\square^{tũ}$ ſcilicet 9. Item 3^{9} & 4^{9} Δ^{li} ſcilicet 6. & 10. faciunt $4^{ũ}$ $\square^{tũ}$ ſcilicet 16. Adhuc 4^{9} & 5^{9} triãguli 10. ſcilicet & 15. faciũt quintum quadratum 25. igitur vnitas, & aggregata talium quadratorum conſumant quinque per ordinem ab vnitate quadratos: & ideo, per diffin. conſtruunt ipſam $\square^{ti}$ quintam pyramidem: idemque ſimiliter, in omni exemplo, cuiuslibet pyramidis Δ^{li} & præcedenti demonſtrabo, per 11^{a} huius arguendo toties, quoties combinãtur Δ^{li}. Quare pyramis quinta Δ^{la} ſcilicet 35. cum præcedenti pyramide Δ^{la} ſcilicet 20. conſtruũt 55. pyramidem $\square^{ti}$ quintã. Quod eſt propoſitum.

1 .. 1
1— 3 .. 4
3— 6 .. 9
10—15 .. 16
10—15 .. 25
20. 35. 55

PROPOSITIO 35ª.

Omnis pyramis pentagona conſtituitur ex pyramide triangula collaterali, & ex duplo præcedentis. Cum per diff. Pentagona pyramis conſtruatur ex pentagonis ab vnitate per ordinẽ aggregatis: iã, exẽpli grã, quinta pyramis pentagona conſtabit ex vnitate, & quatuor ſequentibus pentagonis ſuperficialibus. Quatuor aũt tales pentagoni, per diffin. fiũt ex coniunctione quatuor collateralium quadratorum, & quatuor præcedentium Δ^{lor} ſinguli ſingulorum. Quadrati quoque tales 4^{or} per 11^{a} huius conſtãt ex coniunctione quatuor collateralium Δ^{lor} & totidem præcedentium Δ^{lor}. igitur quinta pyramis pentagona conſtabit ex aggregatione vnitatis quatuor ſequentium triangulorum, duplici totidem præcedentiũ triangulorum.

1— 1
1. 1. 3— 5
3. 3. 6—12
6. 6. 10—22
10. 10. 15—35
20. 20. 35—75

gulorum. Sed per diffi. vnitas, & quatuor ſequentes Δ^{li} faciũt pyramidem $\Delta^{lẽ}$ quintam: & quatuor præcedentes Δ^{li} faciunt Δ^{la} pyramidem quartam. Ergo quinta pyramis pentagona conſtruetur ex aggregatione pyramidis $\Delta^{læ}$ quintæ, duploque $4^{æ}$. Quod eſt propoſitum. Similis eſt cœterorum locorum demonſtratio.

PROPOSITIO 36ª.

Omnis pyramis pentagona conflatur ex pyramide quadrata collaterali, & ex pyramide Δ^{la} præcedenti. Nam, cum exempli gratia, pyramis pentagona 5^{a} per præcedentem, æquiualet aggregato ex quinta Δ^{la} pyramide, & ex duplo pyramidis $\Delta^{læ}$ quartæ: & per ante præmiſſam, pyramidis $\Delta^{læ}$ quintæ, & pyramidis triangulæ quartæ cumulus conſtruat pyramidem quadratam 5^{a}, ſequitur vt cõgeries pyramidis quadratę, quintę cum pyramide triangula quarta conficiat pyramidem pentagonam 5^{a}. & ſimili argumento omnis pyramis pentagona fiet ex pyramide $\square^{ta}$ collaterali, & ex pyramide quadrangula præcedentis, ſicut proponitur.

$$75\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}20\\20\end{array}\right\}55\\35\end{array}\right.$$

pyr. pẽtag. 5. { 4. pyr. Δ^{la} ; 4. pyr. Δ^{la} ; 5. pyra. triang. } 5. pyram. triãg.

PROPOSITIO 37ª.

Omnis pyramis hexagona tetragonica conſtituitur ex pyramide pentagona collaterali, & ex pyramide triangula præcedenti. Exempli gratia, oſtendam ꝙ pyramidis hexagona quinta æqualet aggregato duarum pyramidum, ſcilicet pentagonæ collateralis, & triangulæ quartæ: ſic per diffin. pyramidis hexagona quinta coaleſcit ex vnitate & ex quatuor hexagonis ſuperficialibus ſequentibus: tales autem hexagoni, per diff. ſinguli ex quatuor pentagonis collateralibus, & ex totidem præcedentibus triangulis. Cumque vnitas & quatuor pentagoni ſequentes, per differen. faciant quintam pyramidem pentagonam: quatuorque trianguli præcedentes conficiant quartam pyramidem triangulum: Iam, pyramis hexagona quinta, ſcilicet 95. conflabitur ex Pyramide pentagona quinta ſcilicet 75. & ex pyramide triangula quarta, ſcilicet 20. & ſimiliter per aliis locis accommodabitur demonſtratio propoſiti.

1—— 1
1. 5—— 6
3. 12—— 15
6. 22—— 28
10. 35—— 45
20. 75. 95.

PROPOSITIO 38ª.

Omnis pyramis hexagona tetragonica conſtat ex pyramide triangula præcedenti, & inſuper ex ijs, ex quibus pentagona pyramis collateralis cõſtare oſtenſa eſt. Cũ enim, per præcedẽtem, pyramidis hexagona, exempli gratia, quinti loci cõſtet ex Δ^{la} pyramide 4^{a} & ex pyramide pentagona q̃nta, & pẽtagona pyramides

35
20
20
95 20

55
95 20
20

pyramidis quinta; per 35^a constet ex pyramide triangula quinta, & ex duplo pyramidis triãgulæ quartæ. Iam sequitur vt pyramidis hexagona quinta constet ex pyramide triangula quinta, & ex triplo pyramidis triangulæ $4^æ$. Et similiter, cum per ante præmissam pyramis pentagona 5^a conflettur ex pyramide $\square^{ta}$ quinta, & ex pyramide triangula quarta: & per præmissam pyramis hexagona 5^a superaddat pyramidi pentagonæ $5^æ$ pyramidem triangulam quartam: non minus sequitur vt pyr^{is} hexagona quinta æquiualeat aggregatum ex pyr^{de} quadrata quinta, duploq; triãgulæ pyramidis quartæ: sicut præsens propositio concludit.

PROPOSITIO 39^a.

Omnis pyramis hexagona æquiangula constat ex radice collaterali, tanquàm axe, & ex pyramidis triangulæ præcedentis sexcuplo. Hæc propositio facillime demonstratur ex ipsius pyramidis hexagonæ, & hexagoni sui diffinitionibus. Exépli gratia, pyr^{is} hexagona æquiangula 5^i loci, scilicet 125. per diff. constat ex vnitate & ex quatuor sequentibus hexagonis æquiangulis. tales autem hexagoni per diff. singuli constant ex singulis vnitatibus & ex præcedentibus Δ^{lis} singulis sexcuplicatis. Verùm singuli tales Δ^{li} (qui sunt quatuor ab vnitate, construunt, per diff. pyramidem triangulam 4^a.) & perinde sexcuplicati construunt sexcuplum pyramidis triangulæ quartæ. Igitur dicta pyramis hexagona 5^a constabit ex quinque vnitatibus, 5^a scilicet radice, & ex pyramidis triangulæ quartæ sexcuplo: estque talis radix quasi axis ipsius pyramidis constans ex vnitate verticali, ac quatuor vnitatibus centralibus hexagonorum pyramidem ipsam integrantium. Et similiter per quotcunque pyramide, sicut pro 5^a factum est, ratiocinari possumus ad demonstrationem propositi.

1.
1. 6. 1.7.
3. 18.1.19.
6 6. 36.1.37.
10.60.1.61.
125.

PROPOSITIO 40^a.

Omnis pyramis hexagona æquiangula construitur ex aggregato pyramidis hexagonæ tetragonicæ collateralis & præcedentis pyramidis quadratæ. Exempli gratia: pyramis hexagona æquiangula 5^i loci fiet ex congerie pyramidis hexagonæ tetragonicæ $5^æ$, & pyramidis $\square^{ti}$ quartæ. Nã per diffi. pyramis hexagona æquiangula 5^a constat ex vnitate & ex 4^{or} sequentibus hexagonis æquiangulis. Tales autem 4^{or} hexagoni singuli, per 32^a huius propositionem, constat ex singulis hexagonis tetragonicis collateralibus, & ex singulis quatuor præcedentibus quadratis. Verùm vnitas cum quatuor dictis hexagonis

1—1
1. 6—7
4. 15—19
9. 28—37
16.45—61
30.95—125

hexagonis tetragonicis construunt, per diffi. pyramidem hexagonam tetragonicam quintam: & dicti quatuor quadrati ab vnitate, constituunt pyramidem quadratam quartam. Igitur pyramis hexagona æquiangula quinta cõflabitur ex pyramide hexagona tetragonica quinta, & ex pyramide quadrata quarta: quod erat demonstrandum. Similiter per 32^a & diffinitiones in cæteris locis, verificatur propositum.

PROPOSITIO 41^a.

Omnis pyramis hexagona æquiangula æqualis est aggregato trium pyramidum, scilicet pentagonæ collateralis, ac triangulæ & quadratæ præcedentium. Exempli gratia, dico quòd pyramis hexagona æquiangula quinti loci. s. 125. æquiualet tres pyramides. s. pentagonam quintam 75. vnà cum triangula quarta, scilicet 20. & quadrata quarta, scilicet 30. Nam per præcedentem, pyramis hexagona æquiangula quinta æquiualet duas pyramides, scilicet hexagonam tetragonicam collateralem 95. & quadratam quartam, scilicet 30. Per 37^a autem propositionem huius, hexagona tetragonica quinta æquiualet duas, scilicet pentagonam quintam & triangulam quartam pyramides, scilicet 75. & 20. Igitur hexagona æquiangula quinta æquiualebit tres, scilicet pentagonam quintam, triangulam quartam, & quadratam quartam, sicut fuit demonstrandum: & eodem syllogismo in omni casu constabit semper propositum.

20 Δ
95
75
*125
30 $\square$

PROPOSITIO 42^a.

Omnis columna quadrata, siue cubus, componitur ex duabus columnis triangulis, scilicet collaterali & præcedenti, & ex præcedenti triangulo. Exempli causa, dico, quòd cubus quintus scilicet 125. componitur ex duabus columnis triangulis, scilicet quinta 75. & quarta, scilicet 40. & ex triangulo quarto, scilicet 10. Nam, per diff. cubus talis conficitur ex quinque quadratis quintis: tales autem quadrati, per vndecimam huius, constant ex quinque triangulis quintis & ex totidem quartis. Verùm quinque trianguli quinti, per diff. faciunt columnam triangulam quintam: quinque autem trianguli quarti, faciunt columnam triangulam quartam & vnum triangulum quartum. Igitur cubus assumptus quinti loci æquiualebit aggregatum duarum pyramidum triangularum quintæ & quartæ, & trianguli quarti: sicut demonstrandum fuit. Et simili argumento, quod pro quinto loco, pro quocunque alio procedam ad confirmandum propositum.

10—10. 15—25
10. 15—25
10. 15—25
10. 15—25
10. 15—25
10. 40. 75—125

PROPOSITIO 43.

10——25—35
10.25—35
10.25—35
10.25—35
10.25—35
10.40 125—175

Omnis columna pentagona construitur ex duabus columnis, scilicet quadrata collaterali, triangula præcedenti, & ex triangulo præcedenti. Exempli gratia, columna pentagona quinta 175. aio, quòd conficitur ex duabus columnis, scilicet quadrata quinta 125. & triangula quarta, scilicet 40. & ex triangulo quarto, scilicet 10. Nam per diff. columna pentagona quinta coaceruatur ex quinque pentagonis quintis. Talesque pentagoni, per diffin. ex quinque quadratis quintis, totidemque triangulis quartis. Cumque quinque quadrati quinti conficiant, per diffin. columnam quadratam, siue cubum quintum: atque, cùm quinque trianguli quarti æquiualeant columnam triangulam quartam, & triangulum quartum; iam planè sequitur, vt columna pentagona quinta æquiualeat cubum quintum, columnam triangulam quartam, & triangulum quartum. Neque aliud fuit demonstrandum. Sed argumentatio pro quinto loco facta, similiter ad aliud quemuis accommodabitur, sicut propositio concludit. Potes autem hic, pro cubo, substituere ea, quibus per præcedentem æquiualet cubus. Sic enim columna pentagona æquiualebit triangulam columnam collateralem, duplum columnæ triangulæ quartæ, duplumque trianguli quarti.

$$175\begin{cases}125\begin{cases}75\\40\\10\end{cases}\\40\\10\end{cases}$$

PROPOSITIO 44.

Omnis columna hexagona tetragonica constituitur ex collaterali columna pentagona, exque præcedenti columna triangula vnà cum præcedenti triangulo. Exempli gratia, columna hexagona tetragonica quinta, scilicet 225. conficitur ex quinta columna pentagona scilicet 175. & ex quarta columna triangula, scilicet 40. vnà cum quarto triangulo, scilicet 10. Nam, per diffin. columna hexagona tetragonica quinti loci, coalescit ex quinque hexagonis tetragonicis. Tales autem hexagoni constant per diffin. ex quinque pentagonis eiusdem loci, & ex totidem triangulis loci quarti. Porrò quinque pentagoni quinti conficiunt per diff. columnam pentagonam quintam. Et quinque trianguli quarti æquiualent columnæ triangulæ quartæ & triangulo. Igitur columna hexagona tetragonica quinta perficitur ex columna pentagona quinta, & ex columna triangula quarta. & ex triangulo quarto: quod erat ostendendum, vtque pro quinto factum sic pro cæteris locis prioribus, vel posterioribus argumentare, ad demonstrandum propositum. Et pro pentagona columna substituere potes ea, quæ

10——35—45
10.35—45
10.35—45
10.35—45
10.35—45
10.40 175—225

quæ per præmissam pentagonæ æquiualent. Sic concludes, columnam hexagonam tetragonicam æquiualere aggregatum columnæ quadratæ collateralis, dupli columnæ triangulæ quartæ, duplique trianguli quarti.

$$225\begin{cases}17\begin{cases}125\\40\\10\end{cases}\\40\\10\end{cases}$$

PROPOSITIO 45.

Omnis columna hexagona æquiangula æquiualet aggregato ex columna hexagona tetragonica collaterali, & ex cubo, quadratoque, præcedentibus. Exempli gratia, columna hexagona æquiangula quinti loci scilicet 305. æquiualet aggregato ex columna hexagona tetragonica quinta, scilicet 225. & ex cubo quarto, scilicet 64. quadratoque quarto, scilicet 16. Nam, per diffi. columna hexagona æquiangula quinta constat ex quinque hexagonis æquiangulis. Tales autem hexagoni componuntur, per 32^a. huius, singuli ex coniunctione singulorum hexagonorum tetragonicorum eiusdem quinti loci, & totidemque quadratorum quarti loci. Sed quinque quadrati in quarto loco valent cubum quartum, & quadratum eiusdem loci simul. Et quinque hexagoni tetragonici ex quinto loco faciunt, per diffin. columnam tetragonicam quintam. Igitur columna hexagona æquiangula quinta, valet aggregatum columnæ hexagonæ tetragonicæ quintæ, cubi quarti, & eiusdem quadrati: quod ostendendum fuit. Quæ demonstratio, sicut quinto loco, ita & alijs accommodatur, ad confirmandam propositi veritatem.

16——45—61
16.45—61
16.45—61
16.45—61
16.45—61
16. 64.225.305

COROLLARIVM.

Et pro columna hexagona tetragonica, substituere potes quicquid in præmissis, tali columnæ ostensum est æquiualere. Sic concludere possum, quòd columna hexagona æquiangula æquiualet columnam pentagonam collateralem, columnam triangulam cum suo triangulo, & cubum cum suo quadrato præcedentes. cæteras æquipollentias omitto, ne pluribus, quàm decet, negocium agam.

$$305\begin{cases}225\begin{cases}125\\40\\10\end{cases}\\64\\16\end{cases}$$

PROPOSITIO 46.

Omnis columna hexagona æquiangula coagmentatur ex radice collaterali tanquàm axe, & ex congerie præcedentis triangulæ columnæ, suique trianguli sexcuplicata. Nam, per diff. talis columna cōstruitur ex hexagonis æquiangulis; hexagoni autē ex cētralibus vnitatibus, & sexcuplo triāguli præcedētis. Exēpli grā, colūna hexagona æquiāgula quīta 305. p diff. cōstruitur ex quīq; hexagonis æquiāgulis, hoc ē, quīcuplo ipsiꝰ 61. quīti loci.

$$6\begin{cases}10.60.1\text{-}61\\10.60.1\text{-}61\\10.60.1\text{-}61\\10.60.1\text{-}61\\10.60.1\text{-}61\end{cases}$$
305.

Tales autem hexagoni quinque per diffi.coagmẽtãtur ex vnitatib. singulis.s. 5.qui est quinta radix: & ex triãguli quarti 10. sexcuplo.singuli. Sed quinque talia sexcupla triangulorum,faciunt, per diff. sex columnas triangulas quartas, sexque suos triangulos. Igitur columna hexagona æquiãgula quinta surgit ex coagmẽtatione 5^{e} radicis,tanq̃ axis: & ex columnis quarti loci,sex,cum totidem earũ triãgulis,sicut fuit demonstrãdum. Et assumpti loci argumentum accommodabitur ad quemuis locum assignatum : sicut concludit propositio.

PROPOSITIO 47^{a}.

Omnis columna triangula æqualis est aggregato duarum pyramidum, scilicet quadratæ collateralis, & trianguli præcedentis. Exempli gratia,quinta colũna triangula scilicet 75.dico,quòd æquiualet aggregato pyramidis quadratę quintę,scilicet 55.& pyramidis triangulę $4^{æ}$.s.20. Intelligam enim quinque triangulos quinti loci, singulos sic distinctos, vt formationis diffi. postulat.1.2.3.4.5.qui iam per diffi.constituũt 5^{a} columnam triangulam. ex horum secũdo excipio vnitatem:ex tertio 1.2. ex quarto 1.2.3.ex postremo 1.2.3.4. qui sunt quatuor trianguli ab vnitate dispositi, & per diffi. integrantes quartam pyramidem triangulam. sic relinquitur vnitas, duo binarij,tres ternarij,quatuor quaternarij,& quinque quinarij,hoc est quicunque quadrati seriatim ab vnitate dispositi, & per diffin. construentes quintam pyramidem quadratam. Itaque totum aggregatum ex quinque totalibus triangulis, hoc ex 15. quinquies sumpto, ipsa videlicet quinti loci triangula columna ęquiualet cumulo pyramidis quadratæ quintæ, ac pyramidis triangulæ quartæ : quod fuit ostendendum. Similis est cuiuslibet alterius loci argumentatio ad veritatem propositi.

1 . 1 . 1 . 1 . 1
2 . 2 . 2 . 2 . 2
3 . 3 . 3 . 3 . 3
4 . 4 . 4 . 4 . 4
5 . 5 . 5 . 5 . 5

75 col.Δ^{la} 5^{a} { 55.pyr.$\square^{la}$ 5 ; 20.pyr.Δ^{la}.4 }

PROPOSITIO 48^{a}.

Omnis columna triangula æqualis est aggregato trium pyramidum triangularum,scilicet vnius collateralis, & duarũ præcedentium. Exempli gratia,dico,quòd columna triãgula quinta.s.75. æquiualet aggregato trium pyramidũ triangularum.s.quintæ, & duplo quartæ. Nam,per præcedentem,columna triangula quinta æquiualet pyramidem quadratã quintã & pyramidem triãgulam 4^{a}. Sed per 34^{a} huius,pyramidis quadrata 5^{a} æquiualet pyramidem triangulã quintã,& pyramidem triangulã 4. Igr̃ columna Δ^{la} 5^{a} valebit pyramidẽ triangulã quintã,& duas pyr^{des} Δ^{las} 4^{as}. quod fuit demõstrãdũ. Qui syllogismus sicut hìc quinto loco, ita & vbiuis inseruiet. sicut propositio cõcludit.

$\square^{la}$. 5^{a} 55 { 35 Δ^{la}.5 ; 20 Δ^{la}.4 }
75 col,Δ^{la} 5^{a} { 55 ; 20 Δ^{la} 4^{a} }

Pro-

PROPOSITIO 49^{a}.

Omnis columna triangula æqualis est pyramidi pentagoni collaterali Exempli gratia, columna triangula quinta est 75. quem numerum dico esse pyramidem pẽtagonam quintam. Nam per antepræmissam, columna triangula quinta valet pyramidem quadratam 5^{a} ,& pyramidẽ Δ^{li} quartam. & per 36^{a} tales duę pyramides conficiunt pyramidem pentagonam 5^{a}.quamobrem pyramis pẽtagona quinta valebit columnam Δ^{li} 5^{a}. quod fuit demonstrandum. Eodemq; argumento vtar pro alio quouis loco,sicut propositio sentit.

pyr.Δ^{li} 4^{a}.
col.Δ^{la} 75 5^{a} { 20 ; 55 } 75.pyr. ⬠.5^{a}
pyr.$\square^{la}$ 5^{a}

PROPOSITIO 50^{a}.

Omnis columna triangula, cum duplo sui trianguli, æquiualet triplo pyramidis triãgulæ collateralis. Exẽpli gratia,columna Δ^{la} quinta 75. vnà cum duplo sui trianguli.s.cum 30.dico q̃ æquiualet triplum $\Delta^{læ}$ pyramidis quintæ.s.35.Nam,per ante præmissam, columna Δ^{la} quinta valet tres pyramides triangulas.s. 5^{a} .& duas quartas. Apponantur vtrobique duo trianguli quinti, & fient columna 5^{a} , cum duobus triangulis 5^{is} simul accepta æqualis tribus pyramidibus triangulis.s. $5^{æ}$,duabus quartis, vnà cum duobus triangulis quintis: sed duæ pyramides $4^{æ}$ cum duobus Δ^{lis} quintis,faciunt per diff. duas pyramides 5^{as}. Igitur columna triangula 5^{a} cum duobus triangulis 5^{is} valebit tres pyramides triangulas quintas. quod fuit demonstrandum. Quæ argumentatio ad omnem alium locum accõmodari potest,sicut propositio concludit.

35
75 15 15 { 20 ; 15 } 35
{ 20 ; 15 } 35

cub^{9} 5^{9} 125 { col.triãgula 5^{a}.75 ; col.triãgula 4^{a}.40 ; triangulus 4^{9}. 10 }

PROPOSITIO 51^{a}.

Omnis cubus æqualis est pyramidi hexagonæ æquiangulæ collaterali. Exempli gratia, cubus quintus scilicet 125. qui & idem numerus est pyramis hexagona æquiangula quinta. Quod sic ostendam. Cubus 5^{9},per 42^{a} æqualis est aggregato columnarum Δ^{lar} quintæ & $4^{æ}$, necnon & trianguli quarti. At per 41^{a} pyramis hexagona æquiangula quinta æqualis est aggregato pyramidis pentagonæ quintæ : pyr^{dis} $\square^{ræ}$ quartæ, & pyramidis triangulæ $4^{æ}$. Demonstrandum est igr̃ nobis, quòd hæc duo prædicta aggregata sunt inter se æqualia : sic enim per communem animi conceptum sequetur,vt cubus & pyr^{is} hexagona æquiangula 5^{i} loci, sint inuicem æquales. Auferatur ab illo quidem aggregato columna triangula 5^{a} : ab hoc vero aggregato pyr^{is} pentagona 5^{a} iampridẽ per ante præmissam æquales: Et demonstrandũ erit,quòd duo residua inde.s. aggregatum columnæ triangulæ quartæ & Δ^{li} quarti; hinc

Pyr.hexag.æquiãgula 5.125 { Pyr.⬠^{na}.5^{a} .75 ; Pyr.$\square^{la}$ 4^{a}. 30 ; Pyr.Δ^{la} 4^{a} . 20 }

Col triãg quarta 40 — pyr.⬠^{na}.4^{a} 40 { pyr.$\square^{la}$ 4^{a} 30 ; pyr.Δ^{la} 5^{a} 10 }

Δ^{li} 4^{9}
10 —— Δ^{li} 4^{9} — 10.

hinc autem aggregatum pyramidis □^{tæ} $4^{æ}$,& pyramidis triangulæ quartæ, ſunt inuicem æqualia : quòd ſic patet. Per antepræmiſſam rurſus, columna triangula quarta, æqualis eſt pyramidi pentagonæ quartæ : pyramis autem pentagona quarta, per 36^{a}, æqualis eſt pyramidi quadratæ quartæ, & pyr^{di} triangulæ tertiæ. Quamobrem, columna triangula 4^{a}, vnà cum Δ^{lo} quarto, æqualis erit cumulo trium, ſcilicet pyramidis □^{tæ} quartæ, pyramidis triangulæ tertiæ & trianguli 4^{i}. Oſtendendum eſt igitur, quòd dictus cumulus æqualis eſt aggregato pyramidis quadratæ $4^{æ}$ & pyramidis triangulæ $4^{æ}$. Auferatur vtrinque, ſcilicet tam ab illo cumulo, quàm ab hoc aggregato pyramis quadrata 4^{a}. & demonſtrandum ſupererit, quòd pyramis triangula tertia vnà cum Δ^{lo} quarto æqualis eſt pyramidi triangulæ $4^{æ}$: quòd tandem conſtat per diffin. ipſius pyr^{dis} triangulæ: quippe quæ aſſumpto ſemper ſequenti triangulo procreat ſequentem pyramidem. Qua argumentatione, ſicut in quinto, ita & in quolibet alio præcedenti vel ſequenti loco, ſemper conſtabit propoſitum.

Pyr. □. 4^{ta} — pyr. □. 4^{ta}
30. 30.

Pyr. Δ^{li} 3^{a} 10 } pyr. Δ^{li} 4^{a} 20
Δ^{li} 4^{9} 10

COROLLARIVM.

QVONIAM igitur ſinguli cubi ab vnitate ordinati ſunt ſingulis pyramidibus hexagonis æquilateris ab vnitate diſpoſitis, collateralibus æquales; propterea manifeſtum eſt, quod cuborum differentiæ ſunt pyramidum prædictarum differentijs ſingulæ ſingulis æquales, hoc eſt, ipſis hexagonis æquiangulis. Ac, ſicut ex talium hexagonorum ad vnitatem ſucceſſiua coaceruatione pyramides prædictæ per ordinem conſtruuntur, ita & cubi procreantur. Suntque ipſi hexagoni cuborum gnomones ab vnitate continuati.

1, 7 } 8
8, 19 } 27
27, 37 } 64
64, 61 } 125

PROPOSITIO 52^{a}.

Omnis cubus cum ſequenti hexagono æquiangulo coniunctus conſtituit cubum ſequentem. Hæc propoſitio cõſtat ex præcedenti corollario. Sed & aliter hìc ipſam demonſtrabo. Diſponantur numeri ſic: vnitas 4. & 5. Item horum quadrati 16. & 25. & parte altera longior ex 4. in 5. factus ſcilicet 20. Item eorum cubi 64. & 125. deinde ex 4. in 20. fiat 80. & ex 5. in 20. fiat 100. Quibus diſpoſitis cùm 64. ſit cubus quaternarij, atq; 125. cubus quinarij, oſtẽdẽdum eſt, ꝙ 64. 4^{9} cubus cum 5^{o} hexagono æquiangulo coniunctus conſtat cubum 5^{u} 125. quòd ſic patet: Qm̃, per 9^{i} huius 4. eſt differentia ipſorum 16. & 20. per 10^{a} huius 5. eſt differẽtia ipſorum 20. & 25. atq; ipſe 4. multiplicans ipſos 16. & 20. facit ipſos 64. & 80.

1
4 . 5
16 . 20 . 25
64 . 80 . 100 . 125

Itemq;

Itemque ipſe 5. multiplicans ipſos 20. & 25. facit ipſos 100. & 125. propterea neceſſe eſt, vt differentia ipſorum 64. & 80. ſit ipſe 16. vtque differentia ipſorum 80. & 100. ſit ipſe 20. vtque differentia ipſorum 100. & 125. ſit ipſe 25. quoniam differentia productorum producitur ex multiplicãte in differentiam multiplicatorum. Igitur differentia ipſorum cuborum 64. & 125. conſtabit ex congerie trium numerorum 16. 20. & 25. qui quidem ſunt in hoc exẽplo, quadratus quintus, parte altera longior quintus & quadratus 4^{9} : qui cum, per 31^{a} huius, faciant ſimul acceptæ hexagonum æquiangulum quintum : ſequitur, vt talis hexagonus ſit differentia dictorum cuborum: hoc eſt, vt cubus quartus 64. cum dicto hexagono quinto ſcilicet 61. coniunctus conſtituat cubum quintum 125. quod demonſtrandum in hoc exemplo aſſumpſimus : ſimiliter in omni alio caſu id idem demonſtraturi : ſicut proponitur.

COROLLARIVM.

HINC ergo rurſus manifeſtum eſt, quòd ſicut hexagoni æquilateri ab vnitate continuati, pyramides hexagonas æquiangulas, ita & cubos ordinatim coaceruant.

PROPOSITIO 53^{a}.

Omnis parte altera longior, quadruplicatus cum vnitate, conficit quadratum collateralis imparis. Nam parte altera longior, per nonam huius, cõſtat ex præcedenti quadrato, ſuaq; radice. Igitur quadruplicatus facit quadruplũ talis quadrati (quod quadruplum eſt numerus quadratus) & quadruplum prædictæ radicis, hoc eſt, duplum radicis huic quadrato debitę. Itaque parte altera longior quadruplicatus cum vnitate, efficit congeriem ex quadrato quodam, duploq; ſuæ radicis atque vnitate confectam. Sed, per 14^{a} huius, talis congeries eſt quadratus ſequens: Igitur parte altera longior quadruplicatus cum vnitate facit quadratum : qui cùm impar ſit, propter vnitatis additionem, erit omnino & radix eius impar. Qui ſcilicet conſtat ex præcedenti radice duplicata cum vnitate, & per inde eſt impar ipſius parte altera longioris collateralis. Exempli gratia : numerus 30. parte altera longior ſexti loci quadruplicatus cum vnitate facit 121. quadratum vndenarij ſexti imparis. Nam 30. per nonam conſtat ex præcedenti quadrato 25. ſcilicet quinto, & ex quinta radice 5. quadruplum autem ipſius 25. eſt 100. quadratus paris in ſexto loco. Quadruplum verò, eius radicis ſcilicet 5. eſt du-

4 { 25 —— 100
5 —— 20
1
11 — 11 —— 121

 plum

plũ radicis ipsius 100. Igr̃ quadruplum totius 30. est aggregatum ipsius 100. duploq; suæ radicis: qđ cũ vnitate, facit per 14ᵃ, □ᵗᵘ sequentẽ. s. 11. radicis, qui est impar sexti loci. Quod est demonstrãdum. Similiter, ꝙ pro sexto loco syllogizamus, vbi vis accommodabis. sicut proponitur. PROPOS. 54ᵃ.

4—30—120
1
8—15—120
1
121

Omnis triangulus octuplicatus cum vnitate, conficit sequentis imparis quadratum. Exempli gratia, 15. 5ᵘˢ Δˡˢ octuplicatus facit 120. qui cum vnitate facit 121. □ᵗᵘ sexti imparis. s. 11. Nam per 8ᵃ huius, 5ᵘˢ triangulus duplicatus facit 30. sextum parte altera longiorem. Sed, per præcedentem, 6ᵘˢ parte altera longior quadruplicatus cum vnitate, conficit □ᵗᵘ 6ⁱ imparis 11. Igitur & triangulus 5ᵘˢ 15. octuplicatus cum vnitate faciet eundem □ᵗᵘ sexti imparis 11. quod erat demonstrandum. Quæ demonstratio & alijs locis inseruiet. sicut proponitur.

PROPOSITIO 55ᵃ.

Quod fit ex radice in parte altera longiore collaterali cum quadrato collaterali coniunctum, conflat cubum collateralem. Exempli gr̃a: quinta radix 5. ducta in 5ᵃ parte altera longiorem. s. 20. facit 100. hoc autẽ iũctum cum quinto □ᵗᵒ 25. facit 125. quintum cubum. Nam per diffin. 5. in se ductus, facit suum quadratum 25. quinti loci: & idem 5. cũ quinto parte altera longiori 20. per decimam huius, facit 25. quadratum 5ᵘ. Sed per primam secũdi Elementoꝶ ad nũos relatam, qđ fit ex 5. in se, qđq; ex quinq; in 20. est æquale simul ei, quod fit ex 5. in aggregatum ex 5. & 20. qui quadratus est ipsius 5. Igitur □ ipsius quinq; cum producto ex 5. in 20. parte altera longiori quinto, simul sunt æqualia ei, quod fit ex 5. in suum □ᵗᵘ 25. hoc est cubo ipsius quinarij: qđ fuit demonstrandum. vtq; in loco quinto, similiter & alibi constabit propositum.

5 { 20 —— 100
5 —— 25
cubus quintus 125

PROPOSITIO 56ᵃ.

Quod fit ex radice in triangulum præcedentem duplicatum, & cum quadrato radicis coniunctum, conflat cubum radicis. Exempli gratia, quod fit ex 5. radice quinta in 10. triangulũ 4ᵘ. s. 50. duplicatum est 100. hoc cum 25. quadrato radicis, conflat 125. cubum radicis. Nam, per 8ᵃ huius 10. triangulus 4ᵘˢ duplicatus facit 20. parte altera lõgiorem 5ᵘ: quare productũ ex 5. in 10. s. 50. est dimidium producti ex 5. in 20. & ideo 50. duplicatum facit productum ex 5. in 20. Sed per præcedentem, productum ex 5. in 20. cum □ᵗᵒ ipsius 5. facit cubum ipsius 5. Igitur & 50. duplicatum, hoc est, 100. cum □ᵗᵒ ipsiꝰ 5. facit cubũ eũdẽ 5ᵉ radicis. s. 125. quod est ꝓpositũ.

5 { 10 { 50
50
5 — 25
125

PRO-

PROPOSITIO 57ᵃ.

Omnis cubus cum trianguli præcedentis quadrato cõiunctus, efficit quadratum trianguli collateralis. Exempli gratia, cubus quintus 125. cum quadrato trianguli quarti 10. hoc est cum 100. coniunctus, efficit 225. quadrati scilicet trianguli quinti 15. Quod sic ostenditur. Radix quinta 5. cũ triangulo quarto 10. per diffinitionem, conficit triangulum quintũ 15. quare, per quartam secundi Elementorum ad numeros redactam, duo quadrata scilicet dictæ radicis, & dicti triãguli quæ sunt 25. & 100. vnà cum duplo eius, quod ex radice fit in triangulum, hoc est duplo ipsius 50. conficiunt quadratum trianguli quinti, scilicet 225. Sed, per præcedentem, tale duplum vnà cum quadrato talis radicis, hoc est 100. cum 25. facit cubum ipsius radicis. Igitur cubus ipse quintus cũ quadrato trianguli quarti, hoc est 125. cum 100. simul efficient quadratum trianguli quinti, scilicet 225. Quod fuit ostendendũ. Quæ argumentatio à quinto ad alios locos transferetur, ad probandum propositum.

□. Δ. quarti
radix. 5ᵃ — 100
5 } 15 Δˡˢ 5ᵘˢ
10 } eius. □
Δᵘˢ 4ᵘˢ est 225. — 25 □. radicis } 125 cubus
50
50

PROPOSITIO 58ᵃ.

Omnis trianguli quadratus, æqualis est aggregato cuborum ab vnitate vsque ad cubum triangulo collateralem inclusiuè sumptorum. Sit, exempli gratia, triangulus numerus quintus, qui, per diffinitionem ex vnitate a. & sequentibus per ordinẽ radicibus b c d e. simul iũctis coaceruatur: cuius quadratus sit f. Aio, quòd f. æqualis est aggregato cuborum ab ipsis a b c d e. radicibus singulis factorum. Quod sic demõstratur. Sit g. cubus ipsius radicis e. sitque h. quadratus totius a b c d. hoc est trianguli quarti. Eritque, per præcedentem, ipse f. æqualis ipsis g h. simul sumptis. Rursum, sit k. cubus ipsius d. sitque l. quadratus totius a b c. hoc est triãguli tertij: eritq; per præmissam, h. æqualis ipsis k l. simul. Item, sit m. cubus ipsius b. sitq; n. quadratus totius a b. hoc est trianguli secũdi. eritque similiter l. æqualis ipsis m n. pariter sumptis. Demum sit p. cubus ipsius b. sitque q. hoc est vnitas, quadratus ipsius a. vnitatis: eritque non secus n. æqualis ipsis p q. coniunctis. Quamobrem, ipse f. æqualis erit ipsis g k m p q. pariter acceptis: qui scilicet sunt ipsorum a bcd e. radicum singularum cubi. quod fuit demonstrandum. Idemque de quodlibet in infinitum cubis ostendetur. Quotum scilicet radices per ordinem ab vnitate coaceruant quemuis propositum triangulum, sicut propositio concludit.

a — 1
b —— 2
c ——— 3
d ———— 4
e ————— 5

$$\overbrace{g.\,125 \quad h.100}^{f.\,225}$$
$$\overbrace{k.\,64 \quad l.36}$$
$$\overbrace{m.27 \quad n.9}$$
$$\overbrace{p.8. \quad q.1.}$$

125
64
27
8
1
225

PRO-

Propoſitio 59^a.

3, 4, 5 — 12, 20 — dra. 8

Omnis parte altera longior excedit præcedentem parte altera longiorem in duplo præcedentis radicis, & ideo in ipſo pari numero collaterali. Exempli gratia, quintus parte altera longior 20. excedit quartum parte altera longiorem ſcilicet 12. in duplo quartæ radicis, ſcilicet 8. Quod liquido conſtat. Nam 20. fit ex 4. in 5. at 12. ex 4. in 3. quæ producta differunt in duplo multiplicantis: quoniã multiplicati differunt binario.

□ 8 par.

Et ideo 20. maior eſt, quàm 12. in ipſo pari numero quinto, ſcilicet 8. quippe qui per tertiam huius, eſt duplum prædictũ $4^{æ}$ radicis. Sic & pro alijs locis conſtat propoſitum.

Propoſitio 60^a.

24. differentia.

Omnis quadratus imparis excedit præcedentis imparis quadratum in quadruplo collateralis paris. Exempli gratia: quadrati quarti imparis, ſ. 49. excedit quadratum tertij imparis, ſcilicet 25 in quadruplo quarti paris 6. hoc eſt in 24.

25 {24, 1} 49 {48, 1}

Nam per 53^a præcedentem 49. conſtat ex parte altera longiori quarto quadruplicato, & vnitate. Et per eandem 25. conſtat ex parte altera longiori tertio quadruplicato & vnitate. Igitur 49. excedit ipſum 25. in quadruplo differentiæ, qua parte altera longior quartus excedit parte altera longiorem tertium: Sed per præmiſſam talis differentia eſt per numerus quartus, ſcilicet 6. ergo 49. excedit ipſum 25. in quadruplo quarti paris, 6. hoc eſt, in 24. Quod erat demonſtrandum. Quare ſicut pro quarto, ita pro alio quocunque loco propoſitum concludemus.

Propoſitio 61^a.

Quod fit ex qualibet radice in parte altera longiorem collateralem ſi coniungatur cum quadrato collaterali; conflabitur gnomo, qui coniunctus cum quadrato trianguli præcedentis, conficit quadratum trianguli collateralis. Exempli gratia: Ex radice 5. in quintum parte altera longiorem ſcilicet 20. fit 100. qui iunctus quadrato quinto ſcilicet 25. conflat 125. Aio, quòd 125. poſitus cũ $\square^{to}\,\Delta^{li}\,4^{i}$ 10. ſ. cum 100. cõficiet $\square^{tũ}\,\Delta^{li}\,5^{i}$ 15. ſ. 225. Nam, per 55^a præcedentem, quod fit ex radice 5^a in $5^{ũ}$ parte altera lõgiorem, ſi iũgatur cũ $\square^{to}\,5^{o}$, cõſtituit $5^{ũ}$ cubũ, Sed, p 55^a præcedẽtem, 5^{o} cubus cũ $\square^{to}\,\Delta^{li}\,4^{i}$ cõiunctus cõficit $\square^{tũ}\,\Delta^{li}\,5^{i}$: Igr̃, qđ fit ex radice 5^a in $5^{ũ}$ parte altera lõgiorẽ, iũctum cum $\square^{to}\,5^{o}$: hoc eſt, ipſe nũus 125. ſi apponatur $\square^{to}\,\Delta^{li}\,4^{i}$.ſ. 100. conficiet $\square^{tũ}\,\Delta^{li}\,5^{i}$.ſ. 225. quod fuit oſtendẽdum, in 5^{o} loco & ſimiliter in alijs locis conſtabit propoſitum.

5 — 20 — 100
25
125

10 — 100
125
15 — 225

Pro-

Propoſitio 62^a.

Vnitas primum cubum: duo ſequentes impares iuncti ſequentem cubum: tres ſequentes tertium cubum. Quatuor ſuccedentes quartum. Quinque poſt eos quintum. Sex ſextum. Septem ſeptimum. Semperq́; vno plures ſequentem deinceps in infinitum cubum aggregati conflabunt. Diſponantur ab vnitate a. per ordinem impares in indefinitum b c d e f g h k l m n o p q. Aio, quòd b c. ſimul ſecundum ab vnitate, cubum faciunt. quodq́ue d e f. ſimul tertium cubum: quodq́ue g h k l. ſimul ſumpti quartum cubum: quodq́; ipſi m n o p q. ſimul quintum cubum iuncti conficiunt: Itaque deinceps. Sit enim ipſorũ b c. aggregatum r. & ipſorum d e f. cumulus ſ. & ipſorum g h k l. congeries t. & ipſorum m n o p q. aceruus u. eritq́ue demonſtrandum, quòd a. erit primus cubus, ſcilicet vnitas. & r. ſecundus cubus. & s. tertius. & t. quartus. & v. quintus. hoc modo. Quoniã ipſi a b c d e f g h k l m n o p q. ſunt impares numeri ab vnitate per ordinem diſpoſiti: propterea, per 15^a huius, ipſorum a r s t v. aggregatum erit quadratus ab vnitate in ordine quindecimus: quoniam poſtremus impar, ſcilicet q. quindecimus eſt in ordine impariũ ab vnitate. Itaque tale aggregatum erit quadratus, qui fit à quinto triangulo, hoc eſt à numero quindenario. Talis ergo quadratus, ex præmiſſa 58. erit æqualis quinque cuborum ab vnitate diſpoſitorum cumulo. Et ideo totus a r s t u. numerus erit quinque talium cuborum congeries. Et per eadem ac ſimiliter oſtendemus, quòd ipſorum a r s t. aggregatum erit quadratus ab vnitate decimus: (quandoquidem l. decimus eſt impar:) hoc eſt quadratus quarti trianguli: qui eſt numerus denarius: qui quadratus per 58^a præcedentem erit congeries quatuor cuborum ab vnitate ordinatorum. Quamobrem, cum ipſorum a r s t v. cumulus ſit quinque cuborum ab vnitate continuatorum congeries: atque ipſorum a r s t. cumulus ſit quatuor ab vnitate cuborum aggregatio: neceſſe eſt vt v. ſit 5^{o} cubus ab vnitate. Et ſimiliter poſt quàm per eadem oſtenderimus, pa r s. ſit cumulus trium cuborum ab vnitate: relinquetur t. quartus ab vnitate cubus. Demum oſtenſo, quòd a r. ſit duorum cuborũ cumulus, ſupererit eſſe tertius ab vnitate cubus. Cumq́; a. ſit vnitas; erit & r. alter ab vnitate cubus: quod erat demonſtrandum. Et ſimiliter deinceps, pro ſexto, ſeptimo cæteriſq́; in infinitum cubis procedi poteſt, ſicut propoſitio concluſit.

a — 1
b — 3, c — 5 } r. 8
d — 7, e — 9, f — 11 } ſ. 27
g — 13, h — 15, k — 17, l — 19 } t. 64
m — 21, n — 23, o — 25, p — 27, q — 29 } v. 125

Propo-

PROPOSITIO 63ª.

Omnis cubus cum quadrato & triangulo collateralibus coniunctus, triplum efficit ſuæ quadratæ pyramidis. Exempli gratia: quintus cubus eſt 125. quintus quadratus 25. quintus triangulus 15. Aio, quòd horum aggregatum triplum eſt ad pyramidem quadratam quintam, ſcilicet 55. quòd ſic patet. Cubus quintus per 42ª huius, æquiualet columnas duas triangulas. ſ. quintam, & quartam & triangulum quartum. Item per vndecimam huius, quadratus quintus æquiualet duos triangulos, ſcilicet quintum & quartum. Quamobrem aggregatum prædictum æquiualebit duas columnas triangulas, ſcilicet quintam & quartam, & quatuor ſimul triangulos ſcilicet duos quintos & duos quartos. Igitur demonſtrandum erit, quòd congeries talium duarum columnarum & talium quatuor triangulorum, eſt tripla ad pyramidem quadratam quintam. Sed cum per 34ª huius, pyramis quadrata quinta conſtet ex combinatione duarum pyramidum triangularum quintæ & quartæ: iam oſtendẽdum erit, quòd congeries prædicta duarum columnarum & quatuor triangulorum, eſt tripla ad combinationem dictam duarum pyramidum. Et conſtat ſic. Quod per 50ª huius columna triangula quinta cum duobus triangulis quintis ſimul conficiunt triplum pyramidis triangulæ quintæ: & per eandem 50ª columna triangula quarta cum duobus triangulis quartis ſimul accepta, triplum facit pyramidis triangulæ quartæ. Ergo, per primam quinti Elementorum Euclidis, tota congeries duarum columnarum & quatuor triangulorum, tripla erit ad totam combinationem duarum pyramidum: quandoquidem partes ſingulæ partibus ſingulis triplæ ſunt. & hoc erat demonſtrandum. Et ſimiliter pro cubis cæterorum locorum conſtabit propoſitum.

cub.º 5º 125 { 75. col. Δˡᵃ 5ª. + | 40. col. Δˡᵃ 4ª — | 10. Δ. 4º. — }

□º. 5º 25 { 10. Δº. 4º — | 15. Δº. 5º. + }

Δ. 5º 15 ——— Δ. 5º. +

pyr. □. 5ª 55 { 35. pyr. Δˡᵃ 5ª. + | 20. pyr. Δˡᵃ 4ª — }

PROPOSITIO 64ª.

Omnis columna pentagona cum duplo quadrati collateralis ſimul ſumpta, triplum valet ſuæ pyramidis pentagonæ. Exempli gratia, columna pentagona quinta 175 cum duplo quadrati quinti 25. hoc eſt cum 50. fecit 225. quod triplum eſt ipſius pyramidis pentagonæ quintę 75. quod oſtenditur ſic. Colũna pentagona quinta æqualis eſt cubo quinto per 43ª columnę triangulæ quartæ & triangulo quarto ſimul acceptis: quibus appono vnum quadratum quintum: & pro altera quadrato quinto, appono duos triangulos quintum & quartum, qui per

per 43ª
col. ⬠. 5ª 175 { 125. cub.º 5º. + | 40. co. Δˡᵃ 4ª * | 10. Δˡᵃ. 4º — * }

per 11ª
□. 5º. 25 { 15. Δº. 5º. + | 10. Δ. 4º. * }

*

Hìc pauca deſunt.

11. ſimul ſ emon-
ſtrandum erit quod na
triangula quarta, triangulo quinto, duobus triangulis quartis, ſimul triplum eſt pyramidis pentagonæ quintæ. Sed pyramis pentagona quinta, per 36ª, conſtat ex combinatione duarum pyramidum, ſcilicet quadratæ quintę & triangulę quartę. Ergo eſt demonſtrandum, quòd dictum aggregatum eſt triplum huic combinationi. quod ſic patet, Vna pars illius aggregati, ſcilicet cubus quintus, cum quadrato quinto & triangulo quinto ſimul per pręcedentem, ęqualis eſt triplo quintę quadratę pyramidis,

□. 5º ——— 4
25

Pyr. ⬠. 5ª { Pyr. □. 5 | 55 — + | Pyr. Δˡᵃ. 4 | 20 — * }

*

Hìc multa deſunt, quæ non ſunt in exemplari manuſcripto.

per 37.
ſcilicet pentagonę quintę. Quare oſtendendum eſt, quòd ſupra dictum aggregatum eſt triplum huius combinationis: quod conſtabit ſic. Vna pars illius aggregati, ſcilicet

per 37ª
py. hex. 5ª 95. { Py. ⬠. 5 | Pyr. Δ. 4. (20. * }

scilicet columna pentagona quinta cum duobus quadratis quintis, per præcedentem, æquiualet triplum pyramidis pentagonæ quintæ, quæ fuit vna pars combinationis; & similiter reliqua pars aggregati, scilicet columna triangula quarta cum duobus triangulis quartis simul, per 50. huius, triplum valet pyramidis triangulæ quartæ, quod est residuum combinationis. Quamobrem, quoniam duæ partes aggregati, duabus partibus combinationis, singulæ singulis triplæ sunt: propterea, per primam quinti Elementorum, & totum aggregatum totius combinationis triplum valebit: quod fuit demonstrandum. & eodem syllogismo pro quouis alio assignato loco vtemur ad roborationem propositi.

COROLLARIVM.

25. quadratus quintus

25. □. 5. { 15. Δ. 5 / 10. Δ. 4 }

10. Δ. 4

Et pro duplo quadrati collateralis ac præcedenti triangulo, substituere potes hexagonum & triangulum collaterales: quoniam sunt tantundem. Nam, per vndecimam huius, quadratus quintus valet duos triangulos, quintum & quartum. Quare duo quadrati quinti cum triangulo quarto, simul valent cumulum quadrati quinti, trianguli quinti, & duorum triangulorum quarti loci. Sed, per 19. quadratus quintus, & duo trianguli quarti conficiunt hexagonum quintum: ergo hexagonus quintus, cum triangulo quinto valebunt duos quadratos quintos, & triangulum quartum: & ideo pro illis substitui possunt in præmissa propositione.

hexag. 5. 45. { 25. □. 5. / 10. Δ. 4. / 10. Δ. 4. }

PROPOSITIO 66.

Omnis columna hexagona æquiangula cum hexagono tetragonico collaterali, cumque duobus triangulis, collaterali scilicet & præcedenti, pariter sumpta, triplũ facit suæ pyramidis hexagonæ. Exempli gratia, dico, quòd columna hexagona æquiangula quinta, scilicet 305. vnà cum hexagono tetragonico quinto 45. cumque triangulo quinto 15. & triangulo quarto 10. coniunctis, facit triplum suæ pyramidisquintæ, scilicet 125. ad quod ostendendum sic procedo. Columna hexagona æquiangula quinta, per 45. huius libri, æqualis est columnæ tetragonicæ quintæ, cubo quarto, & quadrato quarto pariter acceptis. His ego appono hexagonum tetragonicum quintum, triangulum quintum, & triangulum quartum; atque ita demonstrandum erit, quod totum huiusmodi aggregatum ex columna hexagona tetragonica quinta, cubo quarto, quadrato quarto, hexagono quinto, triangulo quinto, & triangulo quarto simul, triplum est pyramidis hexagonæ æquiangulæ quintæ.

per 45. Col. hex. æqui. 305 { col. hexag. tetr. 5. + 225. / cub. 4 64 / □. 4. 16 }

hexagonus 5. 45 + triang. 5. 15. + triang. 4. 10.

quintæ. Cumque talis pyramis constet, per 40. ex combinatione duarum pyramidum, scilicet hexagonæ tetragonicæ quintæ, & quadratæ quartæ; iam ostendendum erit, quòd superius dictum aggregatum, triplum est ipsius dictæ combinationis; quod haud obscurè constat. Nam vna pars illius aggregati, scilicet columna hexagona tetragonica quinta, cum hexagono suo quinto, & triangulo quinto, per præcedentis corollarium, æquiualet triplũ pyramidis tetragonicæ quintę: quæ vna partium combinationis est. Nec secus, reliqua pars aggregati, scilicet cubus quartus cum quadrato quarto, & triangulo quarto, simul sumptus, per 63. huius, valet similiter triplum pyramidis quadratæ quartæ, quæ iam de combinatione residua pars est. Itaque quoniam duę partes aggregati duabus combinationis partibus singulę singulis sunt triplę: iccirco, per primam quinti Elementorum, & totum aggregatum totius combinationis triplum erit: quod erat demonstrandum. Et argumentatio à quinto loco ad alia quęuis loca transferetur ad conclusionem propositi.

pyr. hexa. æq. 5 125 { pyr. hexa tetr. 5. 95. / per 40a. / pyr. □. 4a 30.* }

COROLLARIVM.

Et pro duobus triangulis collaterali & pręcedenti, substituere potes quadratum collateralem. Nam, per vndecimam, quadratus ęqualis est duobus simul triangulis, collaterali, & pręcedenti.

COROLLARIVM.

Rursum pro hexagono tetragonico, & quadrato collateralibus, substituere potes hexagonum æquiangulum & numerum imparem collaterales. Nam, per 32. exempli gratia, hexagonus æquiangulus quintus, valet hexagonum tetragonicum quintum cum quadrato quarto. Apponatur vtrobique numerus impar quintus, at tunc hexagonus æquiangulus quintus cum impari quinto valebit hexagonum tetragonicum quintum cum quadrato quarto & impari quinto. Sed, per 13. quadratus 4us & impar quintus simul valent quadratum quintum. Igitur hexagonus æquiangulus quintus cum impari quinto valent hexagonum tetragonicum quintum & quadratum quintum simul sumptos: & perinde iisdem subrogari possunt.

per 32a. hexa. æq. 5. 61 { hexag. tetr. 5us 45 / □. 4. 16 }

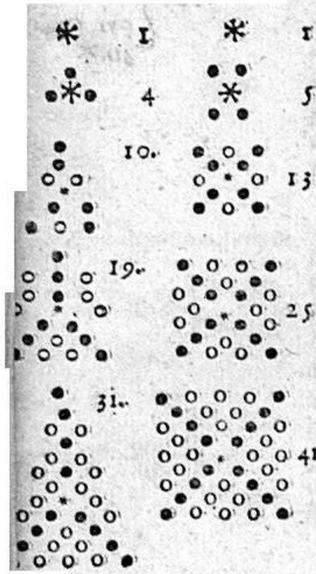
per 13. { □. 5us 25. } impar 5. 9.

impar 5. 9.

LIBRI

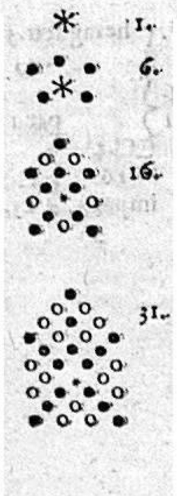
LIBRI PRIMI
Pars Secunda.

PROLEGOMENA.



HActenus de numerarijs formis primi generis, nunc de centralibus agendum: de quarum numero est forma hexagona æquiangula tã superficialis, quàm solida, seu pyramis, seu columna: de qua tamen in primo genere disseruimus, propter talis formæ dignitatem, qua meretur vtrobique tractari. Itaq; quo ad hexagonam æquiangulam formam, hìc non repetemus ea, quæ in præmissis demonstrata sunt: sed præmissis diffinitionibus, cætera prosequemur.

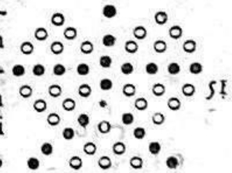
DIFFINITIONES.



OMNIS forma numeraria cẽtralis plana superficialis cõstruitur ex centrali vnitate & ex tot triãgulis præcedẽtibus primi generis, quot sunt formæ ipsius anguli: vtpote triangulus centralis ex vnitate & tribus triangulis. Quadratus centralis ex vnitate & quatuor triangulis. Pentagonus centralis ex vnitate & quinque triãgulis. Hexagonus ex vnitate & sex vt antea diximus. Heptagonus ex vnitate & septẽ. Octogonus ex vnitate & octo triangulis primi generis, latera semper æqualia & angulos vniformes constituentibus compaginatur. Itaq; si lubet, deinceps. Vnde omnis figura centralis superaddit præcedenti figuræ triãgulum. Verũ, sicut in Hexagono geometrico latera sunt semidiametris æqualia; ita hìc, in hexagono numerali vnitates angulares tantùm inter se distant, quantũ ipsæ ab vnitate centrali remouentur: & tres unitates proximæ semper triãgulũ æquilaterũ faciunt: sicut in quadrato primo quatuor unitates quadratum conformant. In cæteris autem formis centralibus, hoc est in triangulo, quadrato & pentagono, unitates laterales magis distant, quàm diametrales: minus uerò in formis hexagonum sequentibus, ut in heptagono & octogono, ut postulat situs Geometricarum formarum, quas Arithmeticæ imitãtur.

Omnis

Omnis porrò pyramis centralis fit ex aggregatione centralium formarum sui nominis ab vnitate vsq; ad basim suam successiuè aggregatarum. Vtpote pyramis triangula, triangularum: quadrata, quadratarum, & deinceps. Omnis demum columna centralis procreabitur ex forma centrali collaterali (quæ sua basis est) toties 4. coaceruata, quota est in ordine, siue in radicem lateralem multiplicata. Harum proprietates & colligantias nunc explicabimus.



PROPOSITIO 67ª.

Omnis triangulus centralis constat ex collaterali triangulo & præcedenti quadrato primi generis. Exempli gratia: triangulus quintus centralis scilicet 31. constat ex triangulo collaterali primi generis, scilicet 15. & ex quadrato quarto, scilicet 16. Quod sic ostenditur. Tres trianguli primo ex ordine, tertius, quartus, quintus, scilicet, 6.10.& 15. simul coniuncti, conficiunt triplum medij, & vnitatem per 29ª huius. Sed per diffin. triplum medij, hoc est, quarti trianguli, cum vnitate, conficit quintum triangulũ centralem. Igitur quintus triangulus centralis constat ex aggregato trium dictorum triangulorum tertij, quarti, & quinti. Cumque per 11ª huius, tertius & quartus triangulus componãt quartum quadratum: sequitur, vt quartus quadratus cum quinto triangulo simul sumptus perficiat quintum triangulum centralem. Quod erat demonstrandum: & à quinto loco transfertur syllogismus ad quem vis alium: vt propositio conclusit.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}6\\10\end{array}\right\}16\\15\end{array}\right\}31$$

PROPOSITIO 68ª.

Omnis quadratus centralis conficitur ex duobus quadratis primi generis, scilicet collaterali & præcedenti. Exempli gratia. Quadratus qntꝰ cẽtralis 41. cõficit ex quinto & quarto quadratis primi generis.s.25.& 16. Qd sic patet. Per 11ª huius, quadratꝰ qntꝰ constat ex quarto & qnto triãgulis primi generis Et p præcedẽtẽ, triãgulus qntus cũ quadrato 4. primi generis, cõficiũt triãgulũ qntũ cẽtralẽ: Igitur quadratꝰ qntus cũ quadrato quarto simul æquiualẽt triãgulos duos.s.quartum primi generis, & qntũ cẽtralẽ. Sed triãgulus qntus centralis cum triangulo quarto primi generis, per diffin. procreat quadratum quintum centralem: ergo quadratus quintus centralis æquiualet duos quadratos primi generis, scilicet quintum & quartum: quod fuit demonstrandum. & argumentum à quinto ad quemuis propositum locum transfertur, vt conclusio proponit. Id idem demonstratur per 30^{am} huius.

$$41\left\{\begin{array}{l}25\left\{\begin{array}{l}10\\15\end{array}\right.\\16\end{array}\right\}31$$

$$41\left\{\begin{array}{l}31\\10\end{array}\right.$$

Y PROPO-

PROPOSITIO 69ª.

Omnis pentagonus centralis construitur ex pentagono primi generis collaterali, & ex præcedenti quadrato. Exempli gratia, pentagonus quintus centralis 51. construitur ex duobus formis primi generis, scilicet pentagono quinto 35. & quadrato quarto 15. Quod sic constat. Per diffinition. pentagonus quintus primi generis construitur ex quadrato quinto & triangulo quarto. Et per præcedentem, quadratus quintus cum quadrato quarto faciunt quadratum centralẽ quintũ. Quare, pentagonus quintus cum quadrato 4° primi generis valebũt quadratum 5ᵘ centralem cũ triangulo quarto primi generis. Verùm per diffinitionem, □ᵗˢ quintus centralis cum triãgulo 4° procreat pẽtagonum quintum centralem. Ergo pẽtagonus 5ᵘˢ centralis æqualebit pẽtagonũ quintũ & □ᵗᵘ 4ᵘ primi generis: qđ fuit demonstrãdũ. Quæ demõstratio, sicut 5° ita cuilibet ꝓposito loco accõmodabitur ad cõfirmãdũ propositũ.

$51\left\{\begin{array}{l}35\left\{\begin{array}{l}10\\25\end{array}\right.\\16\end{array}\right\}41$

$51\left\{\begin{array}{l}41\\10\end{array}\right.$

PROPOSITIO 70ª.

Omnis hexagonus cẽtralis conflatur ex formis primi generis, scilicet hexagono collaterali & quadrato præcedenti. Hæc propositio eadem est cum 32ª. Sed hic in ordine centraliũ aliter demonstrabitur. Dico igitur, ꝙ hexagonus centralis quintus scilicet 61. cõflatur ex quinto hexagono primi generis. s. 45. & □ᵗᵒ quarto 16. Quod quãuis in 32ª huius fuerit demonstrandum, tñ & hìc aliter cõstabit sic. Per diffinitionem, hexagonus 5ᵘˢ primi generis constat ex △ˡᵒ 4° & pentagono quinto primi: & per præcedentem, pẽtagonus 5ᵘˢ talis cum quadrato 4° primi, componunt pentagonum centralem 5ᵘ. Quare, Hexagonus 5ᵘˢ primi cum □ᵗᵒ 4° æquiualebunt triangulum 4ᵘ cum pentagono centrali quinto. Verùm, per diffin. pẽtagonus centralis 5ᵘˢ cum △ˡᵒ 4° constituit hexagonum centralem 5ᵘ. Ergo hexagonus centralis 5ᵘˢ æquiualebit hexagonum 5ᵘ cum □ᵗᵒ 4° pⁱ generis: quod erat demonstrandum. Et similiter pro alijs locis argumẽtatio procedat ad ꝯcludẽdũ propositũ.

$61\left\{\begin{array}{l}45\left\{\begin{array}{l}10\\35\end{array}\right.\\16\end{array}\right\}51$

$61\left\{\begin{array}{l}51\\10\end{array}\right.$

PROPOSITIO 71ª.

Omnis heptagonus conflatur ex tribus formis primi generis, scilicet hexagono tetragonico collaterali, atque quadrato & triangulo, præcedentibus. Exempli gratia, heptagonus 5ᵘˢ 71. conflatur ex primi generis hexagono quinto 45. quadrato quarto 16. & triangulo 4°. 10. Nam, ex diffinitione, ipse 5ᵘˢ heptagonus constat ex 5° hexagono centrali & ex 4° triangulo: Sed per præcedentem, ipse hexagonus æquiualet quintum hexa-

$71\left\{\begin{array}{l}61\left\{\begin{array}{l}45\\16\end{array}\right.\\10\end{array}\right.$

gonum primi generis, & quadratum quartum. Igitur hexagonus quintus primi generis cum quadrato & triãgulo quartis simul conflabunt heptagonum quintum: quod est propositum. Similiter in alijs locis confirmatur propositum.

PROPOSITIO 72ª.

Omnis octogonus est æqualis quadrato imparis numeri sibi collateralis. Exẽpli gratia, 5ᵘˢ octogonus est 81. q quidem □ᵗˢ est imparis 5ⁱ, hoc est nouenarij. Nam, per diffinitionẽ, 5ᵘˢ octogonus ꝯstruitur ex 4° △ˡᵒ primi generis octuplicato, & ex vnitate. Sed, per 54ª huius, tale octuplũ cũ vnitate est quadratus imparis 5ⁱ. Igitur talis □ᵗˢ est ipse octogonus 5ᵘˢ. quod est propositum. Non aliter pro cæteris in infinitum locis constat propositum.

PROPOSITIO 73ª.

Omnis forma centralis plana constat ex vnitate & ex radice præcedenti in numerum laterum ducta, & ex △ˡᵒ radicem præcedente in eundem numerũ ducto. Exẽpli gr̃a, hexagonus cẽtralis 5ᵘˢ 61. cõstat ex vnitate, ex sexcuplo radicis 4ᵉ. s. 4. q est 24. & ex sexcuplo △ⁱⁱ tertij 6. hoc est 36. q liquido cõstat per diffin. ipsius hexagoni: sicut in 26ª fuit ostẽsum. Nam dicta duo sexcupla faciunt sex △ˡᵒˢ 4ᵒˢ qui cum vnitate compaginãt ipsum hexagonũ. Simil̃r in △ˡᵒ cẽtrali, ꝑ sexcuplis accipe tripla: in □ᵗᵒ cẽtrali, quadrupla; in pẽtagono, quincupla: in heptagono, septupla: in octogono octupla ipsarũ radicũ præcedẽtium & △ˡᵒʳᵘ añ præcedẽtiũ: vt in oĩ proposito loco ꝯcludas ꝓpositũ. Vñ, ꝙ 26ª de hexagono, præsens de oĩ plano cẽtrali cõcludit.

$61\left\{\begin{array}{l}1\\24\\36\end{array}\right\}60$

PLANI PRIMI GENERIS. PLANI CENTRALES.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	4	5	6	7	8	9
3	6	9	12	15	10	13	16	19	22	25
4	10	16	22	28	19	25	31	37	43	49
5	15	25	35	45	31	41	51	61	71	81
6	21	36	51	66	46	61	76	91	106	121
7	28	49	70	91	64	85	106	127	148	169
8	36	64	92	120	85	113	141	169	197	225
9	45	81	117	153	109	145	131	217	253	289
10	55	100	145	190	136	181	226	271	316	361
radices	△ˡⁱ	□ᵗⁱ	⬠ⁿⁱ	✳ⁿⁱ	△ˡⁱ	□ᵗⁱ	⬡ⁿⁱ	✳ⁿⁱ	Hept.	Oct.

PROPOSITIO 74ª.

Omnis pyramis cẽtralis constat ex radice collaterali tanquam axe, & ex tot pyramidibus triangulis primi generis præcedentibus loci, quot sunt latera pyramidis centralis. Quod 39ª. huius de pyramide centrali hexagona demonstrauit: hæc præsens de omni pyramide centrali concludit. Et demonstratio vtrobique est eadem. Itaque in omni pyramide sumenda est radix collateralis: sed in pyramide Δ^{la} sumendum est triplum pyramidis triangulæ primi generis præcedentis: in quadrata quadruplum, in pentagona quincuplum, in hexagona sexcuplum, sicut in 39.ª factum est. In heptagona septuplum. In octagona octuplum. Atque ita ex diffin. constabit, sicut in 39.ª propositum. Exempli gratia, pyramis quadrata centralis quinti loci est 85. qui numerus constat ex radice quinta, scilicet 5. & ex quadruplo pyramidis Δ^{lis} primi generis, scilicet ex 80. & similiter in cæteris locis.

$$85\begin{cases}5\\80\end{cases}$$

COROLLARIVM.

Manifestum est igitur, quòd sicut pyramis centralis quadrata supra triangulum pyramidem collateralem: ita & pentagona supra quadratam: nec non hexagona supra pentagonam, & heptagona super hexagonam: & octogona super heptagonam semper addidit præcedentem pyramidem triangulam primi generis. Sicut videlicet basis centralis supra basim collateralem laterum vnitate pauciorum, addit præcedentem primi generis triãgulum.

PROPOSITIO 75ª.

Omnis item pyramis centralis constat ex tot pyramidibus primi generis; ex quot basibus primi generis eius; basis constare ostẽsa est, & eiusdem nominis atque loci. Exempli gratia: pyramis hexagona centralis quinta, scilicet 125. constat ex quintã pyramidẽ hexagona primi generis, scilicet 95. & ex 4ª pyramide quadrata primi generis, scilicet 30. quoniam scilicet basis hexagona cẽtralis quinta, scilicet 61. constat ex hexagono quinto, scilicet 45. & ex quadrato quarto primi generis, scilicet 16. vt in 70ª. ostensum fuit: quod quidem demonstratum est in 40ª huius, quoad hexagonam pyramidem: & similiter hìc generaliter de omni centrali pyramide ostendetur.

$$125\begin{cases}95\\30\end{cases}$$

Sed in horum exemplum exponemus in tabella pyramides vtrasque, tam scilicet primi generis, quàm centralis, in quibus propositionum veritas apparet.

Pyramides

Pyramides pⁱ Generis. *Pyramides Centrales.*

1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1
2	4	5	6	7		5	6	7	8	9	10
3	10	14	18	22		15	19	23	27	31	35
4	20	30	40	50		34	44	54	64	74	84
5	35	55	75	95		65	85	105	125	145	165
6	56	91	126	161		111	146	181	216	251	286
7	84	140	196	252.		175	231	287	343	399	455
8	120	204	288	372		260	344	428	512	596	680
9	165	285	405	525		369	489	609	729	849	969
10.	220	385	550	715		505	670	835	1000	1161	1330
radices	Δ^{la}	□^{ta}	⬠^{na}	*^{na}		Δ^{la}	□^{ta}	⬠^{na}	*^{na}	Hept.	Oct.

PROPOSITIO 67ª.

Omnis columna centralis coagmentatur ex radice collaterali, tanquam axe, & ex congerie præcedentis triangulæ columnæ suiq; trianguli in primo genere in numerum lateri multiplicata.

Quod 46ª huius, ostendit de columna hexagona cẽtrali: hæc pñs de omni centrali columna proponit; & demonstratio hìc & ibi eadẽ est. Itaq; in omni columna sumẽda est radix collateralis: sed in columna triangula, cõgeries præcedẽtis triãgulæ columnæ, suique Δ^{li} in primo genere, multiplicanda est in ternarium. In colũna quadrata in quaternarium: pro columna pẽtagona in quinarium, per hexagona in senarium, per heptagona in septenarium, per octogona in octonarium. Atque ita ex diffin. constabit, sicut in 46. propositum. Exempli gratia: columna centrali quadrata quinti loci, est 225. in conflatur ex radice quinta, scilicet 5 & ex congerie præcedentis triangulæ columnæ suique trianguli in primo genere, scilicet 50. quadruplicata, hoc est, ex 200. & similiter in cæteris locis, & in cęteris columnis.

$$205\begin{cases}5\\200\end{cases}$$

COROLLARIVM.

Vnde manifestum est, quòd sicut columna centralis quadrata supra triangulam centralem columnam collateralẽ: ita & pentagona supra quadratam: Nec non & hexagona supra pentagonam, & heptagona supra hexagonam, & octogona super heptagonam semper addit præcedentem columnam triangulam cum suo triangulo primi generis. Hoc idem de pyramidibus ante præmissæ corrollarium inferebat.

PROPOSITIO 77ª.

Omnis item columna centralis constat ex tot columnis primi generis, ex quot eiusdem generis basibus eius basis constare ostensa est, & eiusdem nominis acque loci. Columnis tamē præcedentis loci unà cū basibus proprijs acceptis. Exempli gratia: columna centralis hexagona quinta, scilicet 305. conflatur ex columna hexagona primi generis quinta, scilicet 225. & ex cubo quarto 64. vnà cum suo quadrato 16. quoniam, scilicet basis hexagona centralis quinta, scilicet 61. constabat ex hexagono quinto scilicet 45. & ex quadrato quarto primi generis, scilicet 16. per 70ª præmissam. Quod quidem in 45ª huius ostensum est, quo ad columnam hexagonam: & demonstratio, simili processu, ad omnem centralem columnam extendi potest. Ad verificandum quod hîc proponitur.

$$305 \left\{ \begin{array}{l} 225 \\ 64 \\ 16 \end{array} \right.$$

PROPOSITIO 78ª.

In omnibus tribus siue planis, siue pyramidibus, siue columnis centralibus, collateralibus, sub continuato laterum numero, susceptis, aggregatum extremorum est duplum ad medium. Exempli gratia, sumatur quintus triangulus 31. quintus quadratus 41. & quintus pentagonus 51. centrales. Aio quòd in his aggregatum extremorum, hoc est 31. & 51. est duplum ipsius 41. medij. Nam, vt constat ex diffin. talium formarum, differentia trianguli & quadrati est æqualis differentiæ quadrati & pentagoni: quando quidem talis differentia est triangulus quartus primi generis. Quamobrem, per 28ª huius, congeries extremorum est duplū medij, quod est demonstrandum. Similiter, si sumantur pyramis triangula quinta 65. pyramis quadrata quinta, scilicet 85. & pyramis pentagona quinta 105. quoniam eodem excessu continuatur per corollarium 74ª præmissę, per dictam 28ª constabit propositum. Item in columnis tribus centralibus, scilicet triangula quinta 155. quadrata quinta 205. Pentagona quinta 255. quarum excessus idem est, per 76ª premissæ corollarium: nihilominus, per dictam 28ª verificatur conclusio. Nec secus si pro quinto, quotuscunque capiatur in ordine locus; per eadem precedet syllogismus ad approbandum propositum. In quorum exemplum, sicut dudum planos numeros & pyramides, ita nunc columnas tam primi generis, quàm centrales in indice sequenti exanabimus.

$$\left. \begin{array}{l} 31 \\ 41 \\ 51 \end{array} \right\} 82 \qquad \left. \begin{array}{l} 65 \\ 85 \\ 105 \end{array} \right\} 170 \qquad \left. \begin{array}{l} 155 \\ 205 \\ 255 \end{array} \right\} 410$$

Columnæ

	Columnæ p^i Generis.				Columnæ Centrales.					
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	6	8	10	12	8	10	12	14	16	18
3	18	27	36	45	30	39	48	57	66	75
4	40	64	88	112	76	100	124	148	172	396
5	75	125	175	225	155	205	255	305	355	405
6	126	216	306	396	276	366	456	546	636	726
7	196	343	490	637	448	595	742	889	1036	1183
8	288	512	736	960	680	904	1128	1352	1576	1800
9	405	729	1053	1377	981	1305	1629	1953	2277	2601
10	550	1000	1450	1900	1360	1810	2260	2710	3160	3610
radices	$\triangle^{le}$	$\square^{te}$	⬠^{næ}	$*^{næ}$	$\triangle^{li}$	$\square^{ti}$	⬠^{ni}	$*^{ni}$	Hept.	Oct.

His ad Lectoris meliorem intelligentiam ita descriptos, ad reliqua properabimus.

PROPOSITIO 79ª.

Omnis columna triangula centralis cum quadrato & triāgulo primi generis collateralibus coniuncta, triplū facit suæ pyramidis. Exēpli gratia, colūna triāgula centralis quinta. s. 155. cū quadrato quinto 25. & triangulo quinto 15. primi generis coniūcta, facit 195. qđ triplū est pyramidis centralis quintæ 65. Quod sic ostenditur. Columna triangula centralis quinta, per 77ª constat ex tribus primi generis formis, scilicet columna triangula quinta, cubo quarto, & quadrato quarto. His appono eiusdē generis quadratū quintū, qui per 11ª valet triāgulū 5ᵘ & 4ᵘ: appono item triangulū aliū quintum. Atq; ita ostēdendū erit quod totum hmōi aggregatū ex columna $\triangle^{li}$ 5ª cubo 4º, quadrato quarto, duobus triangulis quintis & $\triangle^{lo}$ 4º primi generis simul triplum est pyramidis $\triangle^{læ}$ 5ᵗᵉ centralis. Sed cum pyramis $\triangle^{li}$ 5ª cētralis, per 75ª huius, cōstruatur ex cōbinatione duarū pyramidū primi generis, scilicet $\triangle^{læ}$ 5ᵗᵉ & quadratæ 4ᵗᵉ: Iā demōstrādū erit, φ supradictū aggregatū triplū est p̄dictæ cōbinationis. Quod sic patet. Vna pars illius aggregati. s. colūna triāgula quinta, cū duobus triangulis quintis, per 50ª huius, æqualis est triplo pyramidis triāgulę quintæ, quæ fuit vna pars cōbinationis.

$$\text{Col. }\triangle^{læ}\ 5^a\ 2^i\ \ 155. \left\{ \begin{array}{ll} \text{per } 77^a & \\ \text{Col. }\triangle^{li}\ 5^a\ p^i & + \\ 75 & \\ \text{Cub. } 4^{us} & \chi \\ 64 & \\ \square^{us}\ 4^{us} & \\ 16 & \chi \end{array} \right.$$

$$\square^{us}\ 5^{us}\ \ 25 \left\{ \begin{array}{ll} \text{per } 11^a & \\ \triangle l^{us}\ 5^{us}\ p^i & + \\ 15 & \\ \triangle l^{us}\ 5^{us} & + \\ 15 & \\ \triangle l^{us}\ 4^{us} & \chi \\ 10 & \end{array} \right.$$

$$\text{Pyr. }\triangle^{la}\ 5^a\ 2^i\ \ 65\ \ \text{per } 75^a \left\{ \begin{array}{ll} \text{pyr. }\triangle^{la}\ 5^a\ p^i & + \\ 35 & \\ \text{pyr. }\square^{ta}\ 4^a\ p^i & \\ 30 & \chi \end{array} \right.$$

Item que reliqua pars aggregata, scilicet cubus quartus, cum quadrato & Δ^lo quartis, æqualis est, per 63^a huius, triplo pyramidis quadratæ quartæ, quæ fuit altera pars combinationis. Itaque, quoniam duæ partes aggregati duabus partibus combinationis, singulæ singulis triplæ sunt: Idcirco, per primã quinti Elementorum, & totum aggregatum totius combinationis, triplum erit, quòd fuit demonstrandum: & demõstratio à quinto ad quem vis alium locum transferetur ad confirmandum propositum.

PROPOSITIO 80^a.

Omnis columna quadrata centralis cum duplo quadrati collateralis primi generis coniuncta triplum facit suę pyramidis. Exẽpli gratia: columna quadrata centralis quinta. s. 205. cũ duplo quinti quadrati ex p^o genere, hoc est, cum 50. facit 255. quod triplũ est suæ pyramidis, scilicet 85. qd̄ sic cõcluditur. Colũna quadrata centralis quinta, per 77^a, constat ex tribus primi generis formis, scilicet cubo 5^o, cubo 4^o (quæ sunt colũnæ quadratæ) & quadrato 4^o. His applico quadratũ quintũ: & alterum quadratũ quintũ, qui, per 11^a æquiualet duos triangulos, quintum, & quartũ: atq; ita ostendendũ erit, qd̄ totũ tale, aggregatũ ex cubo quinto, cubo quarto, quadrato 4^o, quadrato quinto, & triangulis 5^o & 4^o primi generis, similiter triplum est pyramidis quadratę centralis quintæ. Cunque pyramis talis, per 75^a huius, constat ex combinatione duarũ pyramidũ primi generis, scilicet quadratę quintæ, & quadratæ quartæ: Iã demonstrandũ erit, q̃ supradictũ aggregatũ triplũ sit ad prædictam cõbinationẽ: q̃ sic deducitur. Vna pars illius agregati. s. cubus, quadrat^o, & triangulus quarti loci, per 63^a, simul faciunt triplũ pyramidis quadratæ quartę, quę fuit vna pars combinationis. Itemq; reliqua pars aggregati. s. cubus, quadratus, & triangulus quarti loci, per eandẽ 63^a, simul facit triplum pyramidis quadratę quartæ, quæ fuit reliqua pars combinationis: quamobrẽ duæ iam partes aggregati triplæ sunt ad duas partes cõbinationis, singulæ. s. ad singulos. Et ideò, per quinti Elementorum primã, totum aggregatum totius cõbinationis triplũ erit, qd̄ demonstrãdũ fuit. Et similiter à quinto ad quemuis locũ transferetur demonstratio propositi.

per 77^a
Col. □ 5^a 2^i — Cub^9 5^9
125 +
205. — Cub. 4^9
64 χ
□^9 4^9
16 χ
□. 5^9 p^9
25. +
per 11^a Δl^9 5^9 p^i
□^9 5^9 — 15 +
25 — Δl^9 4^9 p^9
10 χ

Pyr. □ 5^a 2^i — pyr. □ 5^a p^i
85 — 55 +
per 75^a — pyr. □^ta 4^a p^i
30 χ

PROPOSITIO 81^a.

Omnis columna pentagona centralis cum duplo quadrati collateralis, & cum triangulo præcedente primi generis, triplum facit suæ pyramidis. Exempli gratia: columna pentagona centralis quinta 255. cum duplo quadrati quinti. s. 50. & cũ Δ^lo

Δ^lo quarto. s. 10. primi generis, cõficit 315. qd̄ triplũ est pyramidis pentagonæ centralis quintæ. s. 105. qd̄ sic demonstrat. Colũna pentagona centralis quinta per 77^a cõstat ex tribus primi generis formis: videlicet colũna pẽtagona 5^a, cubo 4^o, & □^lo 4^o. His adiungo duplũ □^ti quinti, & triangulũ quartũ, atq; ita demõstrandũ erit, quòd totum id aggregatum ex columna pẽtagona 5^a, cubo 4^o, quadrato 4^o, duobus quadratis quintis, & Δ^lo 4^o simul triplũ sit pyramidis pẽtagonæ cẽtralis quintæ. Verùm pyramis hmõi per 75^a huius, cõstat ex cõbinatione duorum pyramidum primi generis. s. pentagonæ quintæ, & triangulæ 4^tæ, & propterea demõstrandũ erit, quòd memoratum aggregatum pręfatæ cõbinationis triplũ est. Hoc pacto: vna pars illius aggregati. s. columna pẽtagona cum duplo quadrati ex 5^o loco, per 64^a, simlr ęquat triplum pyramidis pẽtagonæ 5^tæ, quæ. s. est vna pars combinationis. Itẽ residua pars aggregati. s. cubus, quadratus, & triangulus quarti loci, simul æquat, per 63^a, triplũ pyramidũ □^tæ quartæ, quæ iã est residua pars combinationis. Sic, quoniam duę partes aggregati ad duas partes combinationis, singulæ ad singulas triplæ sunt: ideò per quinti elementorum primam, totum aggregatum totius cõbinationis triplum erit, & similiter in quocunque alio loco verificatur propositum.

per 77^a — Col. 5^a p^9
Co. ⬠ 5^a 2^i — 175. +
405. — Cub^9 4^9
64. χ
□^9 4^9
16. χ
□ 5^9
□^9 5^9
50.
Δ 4^9 p^i
10. χ

Pyr. ⬠ 5^a p^9
Py. 5^a 2^i — 75. +
105 — Pyr. □^ta 4^a p^9
per 75^a — 30. χ

SCHOLIVM.

Quo autem pacto columna hexagona centralis conficiat, sicut cæteræ columnę suarum singulæ pyramidum, triplum suæ pyramidis satis demonstratum est in sexagesimasexta.

PROPOSITIO 82^a.

Omnis columna heptagona cum hexagono primi generis & quadrato collateralibus atque triangulo præcedenti coniuncta, efficit triplum suæ pyramidis. Exempli gratia: columna heptagona quinta 355. cũ hexagono quinto, quadrato quinto, & triangulo 4^o in p^o genere: hoc est, cum 45. 25. 10. conficit 435. quod aio triplum esse pyramidi heptagonæ quintæ, scilicet 145. Quod sic demonstro. Columna heptagona quinta, per corollarium 76. huius, constat ex tribus formis, ex columna hexagona quinta centrali, & ex columna quarta primi generis, atque triangulo quarto. His adiungo hexagonum quintum primi generis, ac quadratum quintũ, & triãgulum quartum. Atq; ita demonstrãdum erit, q̃ totum hocce aggregatum ex columna q̃nta centrali hexagona, columna triãgula quarta primi generis, triãgulo quarto, hexagono quinto,

per Coroll. 76^a — Col. ✱ 5^a 2
Col. hept. 5^a — 305 +
335 — Col. Δ^li 4^a p
40 χ
Δ^9 4^9 p^9
10 χ
✱ 5^9 p^9
45. +
□ 5^9
25 +
Δ 4^9
10

quadrato

quadrato quinto, & alio triangulo quarto, simul æquiualet triplo pyramidis heptagonæ quintæ. Cunq; per corollarium 74^m huius talis, quinta pyramis constituatur ex combinatione duarum pyramidũ, scilicet ex hexagona centrali quinta, & triãgula quarta primi generis: Iã ostendendũ erit, quod dudum dictũ aggregatũ ad dictã mox combinationẽ triplũ erit, hoc scilicet pacto. Vna pars illius aggregati, scilicet columna hexagona centralis quinta cum hexagono primi generis quinto, & quadrato quinto, simul per corollarium primum 66^æ triplum facit pyramidis hexagonę centralis quintę: quę pars est vna combinationis. Item columna triangula, cũ duobus triangulis quarti loci, per 50^a huius, triplum facit pyramidis triangulæ quartæ, q. residuum est combinationis. Quare cum duæ partes aggregati, duarum partium combinationis, singulæ singularum triplæ sint: Iã per primam quinti Euclidis: totumq; aggregatum totius combinationis triplũ erit. In hoc quinto loco: & similiter in omni alio, quod est propositum.

Pyr. hept. 5^a 145 { Pyr. ✱. 5^a 2^i 125. † / Pyr. △^{la} 4^a p^9 20. χ

Corollarium.

Et pro hexagono primi generis & quadrato collaterallibus, substituere potes hexagonũ centralem & imparem collaterales. Nam, per corollarium 2^ũ 66^æ, hexagonus centralis & impar simul sumptis, valent hexagonũ primi genexis & quadratũ collaterales, hoc est, in quinto loco, huius exempli.

Propositio 83^a.

Omnis columna octogona, cum hexagona primi generis, ac quadrato collateralibus, duploq; triãguli præcedentis coniuncta, facit triplum suæ pyramidis. Exempli gratia, columna octangula quinta 405. cum hexagono primi generis & cum quadrato quinto, hoc est, cũ 45. & cum 25. duploque trianguli quarti, scilicet cum 20. conficit 495. quod aio triplum esse pyramidis octangulæ quintæ, scilicet 165. Quod sic ostendo. Columna octangula quinta, per corollarium 76^æ constituitur ex duabus columnis, septangula quinta: triangula 4^a primi generis, & triangulo quarto. His ergo associo hexagonũ primi generis, & quadratum quintũ: nec non duos triangulos quartos. quo facto, demonstrandum erit, quòd totum istud aggregatum, scilicet ex columna septangula quinta, columna triangula quarta primi generis, triangulo quarto, hexagono quinto, quadrato quinto, duploque trianguli quarti, simul triplum consummabit pyramidis octangulæ quintæ.

Col. 8^{la} 5^a 405. { Col. 7^{la} 5^a 355. † / Col. △^{la} 4^a p^i 40. χ / △l^9 4^9 p^9 10. †

✱^9 5^9 p^i 45. †
□^9 5^9 p^i 25. †
△ 4^9 p^i
△ 4^9 p^i 20. χ

tæ.

tæ. Cumq; per corollarium 74^e huius, talis pyramis quinta conficiatur ex pyramidis septangulæ quintæ, & pyramidis triangulæ quartæ combinatione: Iam ostendendũ erit, quòd dictũ aggregatũ dictæ cõbinationis triplũ erit. hoc videlicet pacto. Vna pars illius aggregati, scilicet colũna septangula quinta cum hexagono primi generis quinto, quadrato quinto, & quadrato 4^o simul efficit, per præcedentẽ propositionẽ, triplũ pyramidis septangulæ quintæ, quæ pars est vna cõbinationis. Itẽ residuũ aggregati, scilicet columna triãgula 4^a primi generis, cũ duplo trianguli quarti per 50^a huius, triplũ facit pyramidis triangulæ quartæ: qui est residuũ cõbinationis. Itaque, cum duæ partes aggregati duarũ partium combinationis singulæ singularum triplæ sint, iã & per primã quinti Euclidis, totũ aggregatũ toti^o cõbinationis triplũ erit. In hoc quinto loco, & similiter alibi. Qđ est propositũ.

pyr. 8^{la} 5^a 165 { pyr. △^{la} 5^a 145 † / pyr. ▽^{la} 4^a p^l △ 20. χ

Col. 8^{la} 5^a 405 { Col. 7^{la} 5^a 355. / Col. □. 4^a p^9 40 / △. 4^9 p^9 10.

✱. 5^9 p^9 45
□. 5^9 p^9 25.
△ 4^9 p^9
▽ 4^9 p^9 20

Corollarium.

Et pro hexagono primi generis & quadrato collateralibus substituere potes hexagonum centralem & imparem collaterales. Nam, per corollarium 2^ũ 66^e hexagonus centralis & impar simul sumpti, valent hexagonum primi generis & quadratũ collaterales, hoc est, in quinto loco, per assumpto exemplo.

Pyr. 8^{la} 5^a 165 { Pyr. 8^{la} 5^a 145 / Pyr. △^{la} 4^a p^l 20.

Propositio 84^a.

Sicut columna triangula centralis cum quadrati & trianguli collateraliũ primi generis aggregato coniuncta, triplum conficit suæ pyramidis. Ita etiam sequentium columnarũ centralium tã quadrata cũ dicto aggregato & vno triangulo præcedenti: q̃ pentagona cũ eodẽ aggregato & duplo triãguli præcedẽtis: q̃ hexagona cum tali aggregato & triplo triãguli præcedẽtis, quàm septãgula cũ ipsomet aggregato & quadruplo triãguli præcedẽtis: quãque octangula cũ eo ipso aggegato & quincuplo triãguli præcedẽtis cõiũcta, triplũ efficit suæ pyramidis. Sũto columnæ cẽtrales collaterales a. quidẽ triãgula, ipse b. quadrata, ipsa c. pentagona, ipsa d. hexagona, ipsa e. septangula, & ipsa f. octangula. Item g. quadratus & h. triangulus eiusdem loci, hoc est, collaterales ipsarum columnarũ & ex ipso genere. Itẽ per triãgulus eiusdẽ generis præcedẽtis loci: & ex alia parte sunto pyramides centrales columnis dictis collaterales: Ipsa quidem l. triangula, ipsa m. quadrata, ipsa n. pẽtagona, ipsa o. hexagona, ipsa p. septangula. ipsaque q. octangula: quibus dispositis, ostẽdẽdũ est, quòd sicut, per 79^i huius aggregatũ ex a g h. triplum est ipsius l. ita & aggregatũ

Col	□△.	△	pyr.
a.	g h		l
b.	g h	K	m
c.	g h	K K	n
d.	g h	K K K	o
e.	g h	K K K K	p
f.	g h	K K K K K	q
	r. s.		

Exemplum pro loco 5^o.

Col. 5.	□. 5.	△. 5.	△. 4.	pyr. 5
155.	25.	15.	—	65
205.	25.	15.	10	85
255.	25.	15.	20	105
305.	25.	15.	30	125
355.	25.	15.	40	145
405.	25.	15.	50	165

40. 20.
Col. △. Pyr. △. 4^a.

ex.

Col.	□ △.	△	pyr.
a.	g h		l
b.	g h K		m
c.	g h K K		n
d.	g h K K K		o
e.	g h K K K K		p
f.	g h K K K K K		q
		r.	ſ.

Exemplum pro 5° loco

155.	25.	15.	—	65
205.	25.	15.	10 —	85
255.	25.	15.	20 —	105
305.	25.	15.	30 —	125
355.	25.	15.	40 —	145
405.	25.	15.	50 —	165
Col. 5. □.	5. △.	5. △.	4. pyr.	5
	40.		20.	

ex b g h. & K. triplum erit ipſius m. nec non aggregatum ex c g h. duploque ipſius k triplum ipſius n. itemq; aggregatũ ex d g h. triploque ipſius k. triplum ipſius o. adhuc aggregatum ex e g h. & quadruplato k. triplum ad p. & tandem aggregatum ex f g h. & quincuplato k. triplũ ad ipſum q. hoc pacto. Sit colũna triangula primi generis præcedens, hoc eſt collateralis ipſi k. triangulo ſignata per r. pyramis autẽ centralis præcedens, hoc eſt, collateralis columnæ r. ac triangulo k. eſto notata per ſ. cumque aggregatum ex a g h. triplũ ſit ipſius l. per 79ᵃ præmiſſam, oſtendã quòd, aggregatũ ex b g h. & k. triplum eſt ipſius m. Nam per corollarium 76ᵉ huius, ipſa b. addit ſuper a. ipſã r. & ipſum k. Et ideò aggregatum b g h k. addit ſuper aggregatum a g h. ipſam r. & duplum ipſius k. Item ipſa m. ſuper l. per corollarium 74ᵉ addit ipſam ſ. Triplum eſt autem additamentum additamẽti, hoc eſt, ipſum r. cum duplo ipſius k. duplum eſt ipſius ſ. per 50ᵃ huius. Igitur per primam quinti Eucl. aggregatum ex b g h. & k. triplum erit ipſius m. quod fuit oſtẽdendum. Et quoniam c. addit ſuper b. ipſam r. & alium k. per corollarium 76ᵉ huius, & n. ſuper m. addit rurſus ipſam ſ. per corollarium 74ᵉ Similiter penitus & eodem proceſſu oſtendã, quòd aggregatum c g h. cum duplo ipſius k. triplum eſt ipſius n. Nec non, quòd aggregatum d g h. cum triplo ipſius k. triplum eſt ipſius o. Adhuc quod aggregatum e g h. cum quadruplo ipſius k. triplum eſt ipſius p. & demum, quòd aggregatum f g h. cum quincuplo ipſius k. triplum eſt ipſius q. ſicut demonſtrandum proponitur.

COROLLARIVM.

Et eodem cremento procederemus, ſi vltra octangulam columnam ac pyramidem confingeremus formas ſequentes, ſcilicet enneagonam, & decagonam, & reliquas deinceps: Sed ne curioſitas modum excedat, ſatis ſit nobis hucuſque progreſſi; & protinus de regularibus ſolidis diſſerere incipiamus, ne quid in hac ſpeculatione intactum relinquatur.

Propositio 85ᵃ.

Omnis par cum paribus omnium præcedentium locorum coniunctus, conficit collateralem parte altera longiorem. Exempli gratia, par quinti loci, ſcilicet 8. coniunctus cum paribus præcedentibus 6.4.2.0. conflat 20. parte altera longiorem quintum. Nam per 3ᵃ huius quatuor dictorum parium aggregatum duplum eſt ad aggregatum totidem radicum ab vnitate continuatarum, hoc eſt, ad triangulum primi generis quartum. Item ad eundem triangulum quartum duplus eſt parte altera longior quintus, ſcilicet 20. per octauam huius. Aequalis igitur eſt parte altera longior quintus dicto quatuor parium numerorum aggregato. Quod fuit demonſtrandum. Et demonſtratio ad alium quemuis locum transferetur vt conſtet propoſitum.

0.	0.	1.
2.	2.	2.
4.	6.	3.
6.	12.	4.
8.	20.	10.
20		

Propositio 86ᵃ.

Si numerorum imparium ab vnitate per ordinem continuatorum ſingulorum ſinguli quadrupli poſt Ziſram diſponantur, ex eorum ſucceſſiua aggregatione cõſtruetur quadrati numeri à paribus collateralibus in ſe multiplicatis producti. Exempli gratia, quotuis ab vnitate impares, vt puta quatuor 1.3.5.7. ſinguli quadruplicentur, & poſt Ziſram diſponãtur ſic 0.4.12.20.28. aio, quòd horum quadruplorum omnium aggregatum eſt numerus quadratus, qui fit à numero pari quinti loci in ſe ducto, hoc eſt, ab octonario. Nam, per 15ᵃ huius ex aggregatione dictorum quatuor imparium fit quadratus quartę radicis. Quare quadrupli eorumdẽ imparium conficient quadruplum dicti quadrati, hoc eſt, quadratum, qui fit ex duplo dictæ radicis in ſe ducto, hoc eſt ex octonario in ſe multiplicato. Nam latera, quorum quadrata ſunt in quadrupla ratione, ſeruant ad inuicem rationem duplam. Similiter per locis alijs conſtat propoſitum.

1.	0.	0.	1.
3.	4.	2.	1.
5.	12.	4.	3.
7.	20.	6.	4.
16.	28.	8.	
	64.		

HOC à principio decreuimus, ingeniose Lector, in hisce nostris numerarijs speculationibus, ut non solum obscurè ab alijs tradita facilius demonstraremus, sed etiam omissa suppleremus. Ne quid igitur, quod ad formas numerorum, pertinet, desyderaretur, sicut pyramidibus & columnis numerarias figuras non unius generis, sicut & planis rectilineis, hactenus adsignauimus; ita & quinque illa geometrica solida, quæ vulgo regularia nuncupantur, adaptatis singula numeris imitabimur: structuram quidem primo definientes, & inde proprietatem singulorum, atque colligantias, per demonstrationes & exemplo exponentes. Sed, cum quinque sint apud egregios Geometras regularia illa, mirum in modum à Platone celebrata corpora, Pyramis uel Tetrahedrum, Octahedrum, Cubus, Icosahedrum, atque Dodecahedrum; è quibus sicut pyramidem tetrahedrum; ita & cubum hexahedrum quoq; à basium numero vocari nemo prohibet. Ex his duæ iam in numeris nostris tractata sunt formæ, pyramis scilicet in ordine primarũ pyramidum: & cubus inter eiusdem ordinis columnas. Sequitur nunc octahedrum, quod semper ex duabus proximis quadratis pyramidibus non aliter, quàm quadratis ex duobus proximis triangulis coalescit. Supersunt duo reliqua, quæ per numeros non nisi centralia intelligi & construi poterunt: quemadmodum in planis formæ secundi ordinis astruebantur. Et sicut in planis septanguli & octanguli numeri non, nisi per centrum & ambitum, conflari commodè possunt; ita fit in huiusmodi duobus postremis solidis. Item, sicut triangulos, quadratos, pentagonos, & hexagonos

xagonos non solùm primi generis, sed etiam cẽtraliter efformauimus ad implendum secundum formarum ordinem; ita & hìc licebit reliqua tria priora solida, pyramidem, octahedrum, & cubum centraliter, sicut postrema duo per numeros configurare. Cum itaq; tam pyramides triangulæ, quàm cubi primæ speciei satis iam superius constructi & expositi sint, & eorum proprietates declaratæ: nunc & octahedri numeri eiusdem speciei sic quidem faciliter construentur, si ab unitate exordium capientes, (ut diximus) duas quasq; proximas primi generis quadratas pyramides coniũgamus: sicuti fit in ipso continuo geomotricoq; octahedro solido. Cum itaque pyramides quadratæ primæ huiusmodi se in ordine habeant, ut superius describebãtur, itã & octahedri numeri primæ speciei singuli & collaterali & præcedenti pyramide cõiũctis haud difficilius sub ijsdem exarabũt. Hoc vz pacto.

1	5	14	30	55	91	140	204	285	385	Pyramides quadratæ primi generis.
1	6	19	44	85	146	231	344	489	670	Octahedri primi generis.

Et eadem aggregatione in infinitum fiet processus, & si non actu, potentia tamen, quæ nunquàm theorico intellectui negatur. Agendum nunc de solidis regularibus centralibus, in quibus semper unitas in centro ponitur sicut & in planis numeris centralibus. Sed opereprecium est intelligere imprimis quo pacto disponendæ sint cæteræ unitates, & quibus in locis, ad efformanda, ut decet, talia solida numeralia. Nec dubium, quin in singulis, posita unitate cẽtri tam per singulos solidos angulos, quàm per singula basium centra singulæ sint unitates disponendæ. Itaque cum pyramis habeat quatuor angulos & totidem bases, habebit cum centrali unitate nouem unitates. Cum autem octahedrum habeat

beat sex angulos, & octo bases & centrum; habebit vnitates quindecim. & totidem vnitates cubus: quandoquidem habent angulos octo & bases nouem & centrum. Vnde sicut secundus ab vnitate octahedrus, secundo adequatur cubo; ita & tertius tertio: & quartus quarto: & sequentes sequentibus, singuli singulis in infinitum semper æquales existunt: vt postea demonstrabimus. Deinde cũ Icosahedrum habeat 12. angulos solidos, bases autem 20. & centrum; constituetur ex vnitatibus 33. & ex totidem vnitatibus dodecahedrus, vt pote qui habet angulos 20. bases 12. & centrum, hoc est secundus Icosahedrus secundo Dodecahedro æqualis est. Et similiter deinde tertius tertio: & quartus quarto: & sequentes sequentibus singuli singulis Icosahedri Dodecahedris in infinitum semper adæquabuntur propter eandem, quæ in Octahedro & cubo, reciprocam angulorum & basium numerorum æqualitatem: vt in suo loco in propositionibus ostendemus. Sed quo pacto sequentes solidi numeri, hoc est, sequentium locorum formentur, audi. Nec te, perspicacissime lector, tædeat ea perpẽdere, quæ ad huiusmodi numerarias formas, ab aliis omissa, & ad speculationis Arithmeticæ perfectionẽ maximè spectãt. Cognosces enim proprietates earum notatu dignissimas, nec nisi curiosis ingeniis patulas. Imaginor itaq; in hisce quinque singulis regularibus solidis, à centro ad angulos educi singulas semidiametros: quæ quidem in pyramide erunt quatuor in octahedro 6. in cubo 8. in Icosahedro 12. In dodecahedro 20. quot scilicet sunt solidi anguli, seu vertices solidorum. Deinde in iisdem intelligo linearia latera quæ vertices ipsos coniungunt. in pyramide scilicet latera sex, In octa-

octahedro 12. In cubo totidem. In icosahedro 30. In dodecahedro totidem. Quæ quidem, cum semidiametris latera singula binis totidem triangulos continent quot sunt latera. His suppositis, iam nulli obscurum erit inter trina quidem quælibet huiusmodi triangula pyramides intercipi, quę tot sunt quot ipsius solidi bases, in tetrahedro .s. pyramides quatuor triangulas, in octahedro octo triangulas; in icosahedro viginti similiter triangulas. At in cubo inter quaterna triangula, pyramides sex quadratas. In dodecahedro inter quina triangula, pyramides 12. pentagonas. Quibus consideratis, iam constabit, vnumquodque horum solidorum constrni debere ex vnitate centrali, ex vnitatibus per semidiametros dispositis, ex numeris triangulis, exque numeris pyramidibus. Hoc modo. Pyramidem, siue tetrahedrum, ex centro, ex quatuor semidiametris, ex senis triangulis, & ex quatuor pyramidibus triangulis. Octahedrum ex centro, ex senis semidiametris, ex duodecim triangulis, & ex 8. pyramidibus triangulis: cubum ex centro, ex 8. semidiametris, ex 12. triangulis, & ex senis pyramidibus quadratis. Icosahedrum ex centro, ex duodecim semidiametris, ex triginta triangulis, & ex 20. pyramidibus triangulis. Dodecahedrum ex centro, ex 20. semidiametris, ex triginta triangulis, & ex 12. pyramidibus pentagonis. Postquam itaque vnitas præbet singulis solidis huiusmodi, nomen: quippe quæ nullam non numeri spetiem suscipit; iam in secundo loco (vt diximus) pyramis habebit 9. vnitates; Octahedrus 15. cubus totidem. Icosahedrus 33. Dodecahedrus totidem.

Z Nam

Nam cętrum cum angulis & basium centris tot vnitates suscipiunt. Quo quidem in loco semidiametri sunt ipsę angulorum vnitates: trianguli nulli: pyramides verò solæ vnitates, quæ sunt basium centra. Quare hic tam semidiametri, quàm pyramides exordium sumunt. Intellige autem semper Δ^{los} primæ speciei; pyramides verò secundæ: quoniam oportet eas esse centrales. In tertio mox loco crescunt singulæ semidiametri per vnitatem: trianguli autem exordium capiunt, suntque vnitates; pyramides verò sunt, quæ vnitatem sequuntur: triangulæ quinarium singulæ; quadratæ senarium: ac pentagonæ septenarium habentes: In quo quidem loco pyramis constat ex 1. ex quatuor semidiametris, scilicet 8. ex sex triangulis, scilicet 6. & ex quatuor pyramidibus, scilicet 20. quæ conficiunt 35. Octahedrus constat ex 1. ex sex semidiametris, scilicet 12. ex duodecim triangulis, scilicet 12. & ex 8. pyramidibus triangulis, scilicet 40. quæ constant 65. & tantundem faciunt vnitas: octo semidiametris, scilicet 16. ac 12. trianguli, scilicet 12. cum sex pyramidibus quadratis. s. 36. pro cubo construendo: nam octahedrus & cubus semper sunt æquales. Icosahedrus fit ex 1. ex 12. semidiametris, scilicet 24. ex 30. triangulis, scilicet 30. ex 20. pyramidibus triangulis, scilicet 100. vnde complectitur 155. Et tantundem suscipit huius loci dodecahedrus. Nam vnitas 20. semidiametri, scilicet 40. trianguli 30. scilicet 30. pentagoni pyramidis 12. scilicet 84. simul constant dictũ numerum, scilicet 155. In quarto loco semidiametri singulæ habent 3. trianguli singuli 3. pyramides, triangulæ singulæ 15. quadrati 19. pentagoni 23. vbi pyramis cùm constet ex

vnitate

vnitate ex quatuor semidiametris, scilicet 12. ex sex triangulis, scilicet 18. ex quatuor pyramidibus, scilicet 60. habebit 91. Octahedrus autem ex vnitate sex semidiametris scilicet 18. ex 12. triangulis scilicet 36. & ex octo pyramidibus triãgulis. s. 120. constans, habebit 175. & tantundẽ cubus: nã vnitas, octo semidiametri scilicet 24. duodecim trianguli scilicet 36. & sex pyramides, scilicet 114. eundem numerũ 175. conficiunt. Item icosahedrus constans ex vnitate, ex 12. semidiametris, scilicet 36. ex 30. triangulis, scilicet 90. & ex 20. pyramidibus triangulis scilicet 300. compræhendet 427. & tantundem Dodecahedrus. Nam vnitas viginti semidiametri, scilicet 60. triginta trianguli, scilicet 90. duodecim pyramides pentagonæ, scilicet 276. eundem numerum 427. constituunt. In quinto loco semidiametri singulæ habent 4. trianguli singuli 6. pyramides triangulæ singulæ 34. quadratæ 44. pentagonæ 54. Vnde aggregatis vnitate semidiametris, triangulis, & pyramidibus prædicto sub numero sumptis, constabunt solida quinti loci: pyramis 189. octahedrus ac cubus 369. Icosahedrus & Dodecahedrus 909. pro sexto loco semidiameter habent 5. triangulus 10. pyramis triangula 65. quadrata 85. pentagona 105. Vnde aggregatio repetita faciet pyramidem 341. Octahedrum & Cubum 671. Icosahedrum & dodecahedrum 1661. Pro septimo loco semidiameter habent 6. triangulus 15. pyramis triangula 111. quadrata 146. pentagona 181. sic ex consueto cumulo fiet pyramis 559. Octahedrus & Cubus 1105. Icosahedrus & dodecahedrus 2743. Pro octauo loco, semidiameter habent 7. triangulus 21. pyramis triangula 175.

 quadrata

quadrata 231. pentagona 287. & factis, secundum regulam summis, pyramis erit 855. Octahedrus & cubus 1695. icosahedrus, & dodecahedrus 4215. Pro nono loco, semidiameter sortitur 8. triangulus 28. pyramis triangula 260. quadrata 344. pentagona 428. & peracta more consueto congerie, perueniet pyramis 1241. Octahedrus & cubus 2465. Icosahedrus & dodecahedrus 6137. Pro decimo demum loco, semidiameter habet 9. triangulus 36. pyramis triangula 369. quadrata 486. pentagona 609. ex quorum positione conflabūt summæ pyramidis quidē 1729. Octahedri & cubi 3439. Icosahedri & dodecahedri 8569. & deinceps, seruato semper precepto, in infinitum inuenietur cubus octahedro, & dodecahedrus icosahedro æquales. Quod sic esse, demonstratione postea roborabimus, præmissis necessarijs præambulis. Mox & alias quasdam admiratu dignas proprietates executuri, sicut profundas, ita maioribus nostris nunquam hactenus animaduersas, quæ quidem idcirco prælibata sunt à nobis ingeniose Lector, vt ea, quæ demonstraturi sumus, magis tibi peruia sint, sed & solida ipsa vsque ad decimum locum collecta hìc breui tabella commonstrabimus, vt dudumtraditum structuræ modum, exposito exemplo prontius intelligas. Eccam tabellam.

1	9	35	91	189	341	559	855	1241	1729	Pyram. cubi mixti.
1	15	65	175	369	671	105	1695	2465	3439	Octahedri cubi.
1	33	155	427	909	1661	2743	4215	6137	8569	Icosahedri dodecah.

Est etiam tertia cuborum species, quos mixtos appellare libuit: eo quod singuli fiant ex mixtione collateralis cubi primi generis & cubi præcedentis, non aliter, quàm quadrati centrales

centrales ex mixtione quadrati collateralis & præcedentis primi generis. Sed magis admiraberis ingeniose Lector, huiusmodi cubos mixtos esse singulos ęquales singulis collateralibus tetrahedris centralibus iamdudum expositis, sicut in fine demonstrabimus. His ergo præmissis, ad ipsorum solidorum diffinitiones veniamus.

DIFFINITIONES.

Pyramis triangula siue tetrahedrus primi generis, quæ figura, propter basium conformitatem, inter numerarias regulares solidas reponi meretur, constitit in diffinitionibus primis. Octahedrus primi generis compaginatur ex duabus quadratis pyramidibus primi generis. s. collaterali, & præcedenti: queadmodum quadratus primus cõflabatur ex duobus primi generis triangulis, collaterali scilicet & præcedenti. Cubus mixtus componitur ex duobus cubis primi generis, scilicet collaterali & præcedenti, non aliter q̃ antea quadratus centralis conflabatur ex duobus primi generis quadratis. s. collaterali & præcedenti. Nunc autem diffiniendæ sunt solidorum regularium centralium, siue secundi generis structuræ sic: Omnis radix propositi loci cum vnitate, triãgulo præcedente primi generis, pyramideque centrali collaterali, constituere potest numerum solidum, regularem sequentis loci: ita scilicet vt radix in numerum solidorum angulorum multiplicetur: triangulus in numerum laterum linearum, Pyramis in numerum basium, Tetrahedrum igitur, siue pyramidem construet, vnitas centralis, radix quadruplicata, triangulus sexcuplicatus, & pyramis triangula quadruplicata. Octahedrum autem constituet vnitas centralis, radicis seculplum, trianguli duodecuplum, & Pyramidis triangulæ octuplum. Hesahedrum siue cubum conficiet vnitas centralis, radicis octuplum, trianguli duodecuplum, & pyramidis quadratæ sexcuplum. Icosahedrum conflabit, vnitas centralis, radicis duodecuplum, trianguli trigecuplum, & pyramidis triangulæ vigecuplum. Dodecahedrum tandem conflabit, vnitas radicis vigecuplum, trianguli Trigecuplum, & pyramidis pentagonæ duodecuplum. Pyramides enim pro cubo quadratæ: pro dodecahedro pentagonæ: pro cæteris triangulæ capiendæ sunt, quo scilicet sint corporis ipsius basibus conformes.

85 { 55 / 30

Propositio 87.

Omnis octahedrus primi generis æqualis est pyramidi quadratę centrali, sibiq; collaterali. Exempli gratia: octahedrus quintus, primi generis est. Aio, quod is idem numerus est, & pyramis quadrata centralis quinta. Nam per 75ᵃ & 68ᵃ huius, pyramis quadrata quinta conficitur ex duabus pyramidibus quadratis primi generis, scilicet quinta & quarta, & per diffinitionem ipsius, de quo loquimur, octahedri, talis octahedrus quintus componitur ex ijsdem dictis duabus quadratis pyramidibus. Igitur octahedrus quintus est pyramidi quadratę quintæ ęqualis: & similiter in quo vis alio loco verificatur propositum.

Propositio 88.

per 36ᵃ pyr. ⬠ 5ᵃ 75. { pyr. □. 5ᵃ 55. / pyr. △ˡᵃ 4ᵃ 20.

per 41ᵃ pyr. *. 5ᵃ Cub. 5 125 { pyr. ⬠ 5ᵃ 75. / pyr. □. 4ᵃ 30. / pyr. △ˡᵃ 4 20. } per 51ᵃ

per diffi. Octahed. 5ᵒ 85 { pyr. □ᵗᵃ 5ᵃ 55 / pyr. □. 4ᵃ 30

Omnis cubus primi generis æqualis est aggregato ex octahedro primi generis collaterali, duploq; triangulæ pyramidis præcedentis. Exempli gratia: cubus quintus, scilicet 125. æqualis est octahedro primi generis quinto. s. 85. vna cum duplo pyramidis quartæ primi generis, scilicet cum 40. Quod sic ostenditur, per 51ᵃ huius, cubus quintus ęqualis est pyramidi hexagonæ æquiangulæ quintæ: per 41ᵃ autē pyramis hexagona quinta ęquiangula valet aggregatum ex pyramide pentagona quinta, & ex duabus pyramidibus quarti loci. s. quadrata & triangula primi generis. Sed, per 36ᵃ huius, pyramis pentagona 5ᵃ æquiualet aggregato pyramidum quadratæ quintæ, & triangulæ quartę. Igitur pyramis hexagona quintæ, siue cubus ipsi æqualis valebit aggregatum ex duabus pyramidibus quadratis quinta & quarta, & ex duplo pyramidis triangulæ quartæ. Cumq; per diffinitionem duæ prædictæ pyramides quadratæ cōficiant octahedrum primi generis quintū: iam & talis octahedrus quintus cum duplo pyramidis triangulæ quartæ sumptus, adæquabit cubum quintum: quòd erat demonstrandum. & perinde sicut in quinto, ita in quouis alio loco constabit propositum.

Propositio 89.

Omnis impar in quadratum secundæ speciei, hoc est, centralem, sibi collateralem multiplicatus, producit gnomonem collateralem ex ordine gnomonum ab vnitate cōtinuatorum, atq; quadratos ex quadratis primis in se ductis genitos per additionem successiuam

successiuam constituentium. Præmissa vnitate, quæ omnem numeri speciem repræsentat secundus impar est 3. secundus autem quadratus centralis est 5. ex horum ducto fit 15. gnomo secundus quippe qui cum vnitate facit 16. quadratū scilicet quaternarij. Quod sic ostendo: post vnitatem notabo primum duos in tres, in quatuor, in quinque numeros ab vnitate per duplam proportionem notatos. Hoc pacto duo primi numeri, scilicet 1. 2. per sextam huius simul conficiunt imparem secundi loci, scilicet 3. Extremi autem sequentis ordinis scilicet 1. 2. 4. sunt 1. & 4. proximi scilicet quadrati, quorum congeries, per 68ᵃ huius, est quadratus centralis secundi loci, scilicet 5. Itaque demonstrandum est, quòd aggregatum ex vno, & 2. multiplicatum in congeriem ex 1. & 4. producit gnomonem secundi loci, hoc est differētiam ipsorum 1. & 16. qui sunt quadrati quadratorum, primus vnitatis, & alter quaternarij. Talis enim gnomo, scilicet 15. appositus vnitati, constituit 16. quadratum quadrati secundi: Nam in hisce quatuor numerorum ordinibus, duo primi, scilicet 1. 2. sunt differentiæ trium sequentiū, scilicet 1. 2. 4. & rursus hi tres sunt differentiæ quatuor sequentium, scilicet 1. 2. 4. & 8. & adhuc hi quatuor sunt differentiæ quinque postremorum, scilicet 1. 2. 4. 8. 16. quandoquidem in numeris continue proportionalibus differentiæ sunt continue proportionales, & primæ differentiæ sint iam vnitates, sicut primi ordinum singulorum numeri. Hic est autem processus demonstrationis: aggregatum ex vno & 2. primi ordinis ductum in vnitatem, facit cōgeriem 1. & 2. in tertio ordine. Item aggregatum ex 1. & 2. primi ordinis ductum in 4. producit 4. & 8. in tertio ordine, hoc est, 12. Igitur tale aggregatum ex 1. & 2: hoc est 3. ductum in congeriem ex 1. & 4. hoc est, in 5. producet cumulum quatuor numerorum, scilicet 1. 2. 4. 8. Verùm talis cumulus facit cumulum differentiarū quarti ordinis, scilicet ipsorū 1. 2. 4. 8. 16. & perinde facit differentiam extremorum, scilicet 1. & 16. hoc est, 15. gnomonem secundi loci prædictum. Quod fuit demonstrandum. Item dico quòd tertius impar, scilicet 5. ductus in tertium quadratum centralem. s. 13. producet tertiū gnomonem ex prædictis, scilicet 65. qui. s. cum 16. coniunctus facit quadratū nouenarij, qui tertius quadratus est, facit inquā 81. quadratum ex quadrato tertio in se dicto genitum. Quod haud obscure, nec difficilius ostendam Hoc processu.

Pro secundo loco.

1
1 . 2
1. 2. 4
1. 2. 4. 8
1. 2. 4. 8. 16

3 } 15
5 }

Pro tertio loco.

1
2 . 3
4. 6. 9
8. 12. 18. 27
16. 24. 36. 54. 81.

5 } 65.
13 }

Post vnitatem notabo radices proximas secundi & tertij loci, scilicet 2. & 3. qui, per sextam huius, coniuncti faciunt tertium imparem: mox duco 2. in se, & in 3. nec non 3. in se, & fient 4. 6. 9. continue proportionales in ratione ipsorũ 2. & 3. & Rursum, ex quatuor multiplicationibus, scilicet ex ductu 2. in 4. & in 6. & ex ductu 3. in 6. & in 9. fiant quatuor numeri similiter proportionales 8. 12. 18. 27. Et adhuc ex quinque multiplicationibus, scilicet ex 2. in singulos dictos 4. 8. 12. 18. 27. & ex 3. in 27. fiant quinque numeri 16. 24. 36. 54. 81. in eadem ratione continua proportionales. Atque his constitutis, demonstrandum erit quòd aggregatum ex 2. & 3. scilicet 5. tertius impar, multiplicatum in aggregatum ex 4. & 9. hoc est, in 13. quod, per 68ª, est tertius quadratus centralis, producit differentiam ipsorum 16. & 81. hoc est, gnomonem ex his, quales diximus tertium. Nam per 21ª septimi Elementorum Euclid. quoniam ex ductu ipsorum 2. 3. primi ordinis, nascuntur numeri trium reliquorum ordinum, idcirco singuli ordines seruant continuam proportionem primi: & quoniam ex multiplicante in differentiam multiplicatorum, producitur differentia productorum: idcirco, duo numeri primi ordinis, scilicet 2. & 3. sunt differentię numerorum sequentis ordinis, scilicet ipsorum 4. 6. & 9. & similiter hi tres sunt differentię numerorum quarti ordinis, qui sequitur, scilicet ipsorum 8. 12. 18. 27. Nec secus hi quinque sunt differentiæ quinque numerorum sequentium, scilicet 16. 24. 36. 54. 81. quo fit, vt cumulus ipsorum 8. 12. 18. 27. sit differentia ipsorum 16. 81. extremorum. Vnde demonstrandum erit, quòd ex multiplicatione aggregati ipsorum 2. 3. in congeriem ipsorum 4. & 9. hoc est ex ductu 5. in 13. tertij, scilicet imparis in tertium quadratum centralem, producitur cumulus ipsorum 8. 12. 18. 27. hoc modo. Quoniam ex 2. in 4. fit 8. & ex 3. in 4. fit 12. per 23ª septimi Euclidis (quoniam 2. ad 3. sicut 4. ad 16.) propterea ex 4. in aggregatum ipsorum 2. 3. fit aggregatum ipsorum 8. 12. per primam secundi Elementorum, & per eãdem rationem, quoniã ex 2. in 9. fit 18. & ex 3. in 9. fit 27. propterea ex 9. in aggregatum ipsorum 2. 3. fit aggregatum ipsorum 18. 27. Rursum ergo ex prima secundi Euclidis sequitur, vt ex aggregato ipsorum 2. 3. in aggregatum ipsorum 4. 9. fiat cumulus quatuor numerorum 8. 12. 18. 27. Quod fuit demonstrandum.

Eodem

Pro quarto loco.

1
3 . 4
9. 12. 16
27. 36. 48. 64
81. 108. 144. 192. 256

$\left.\begin{matrix}7\\25\end{matrix}\right\}$ 175.

Eodem penitus processu demonstrabimus, q quartus impar. s. 7. ductus in quadratũ cẽtralem quartũ 25. efficit 175. gnomonẽ quartũ, qui cum quadrato nouenarij iunctus. s. cum 81. cõponit quadratũ ex 16. scilicet 256. Itẽ similiter ostendemus, q quintus impar. s. 9. ductus in quintũ quadratũ cẽtralẽ. s. 41. producit 369. gnomonẽ quintũ, q cũ 256. cõstituit 625. q quadratus est 5ⁱ quadrati: & sic in infinitũ.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	Impares
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	Quadrati primi.
1	5	13	25	41	61	85	113	145	181	Quadrati centrales.
1	15	65	175	369	671	1105	1695	2465	3439	Gnomones,

Pro quinto loco.

1
4 . 5
16. 20. 25
64. 80. 100. 125
256. 320. 400. 500. 625.

$\left.\begin{matrix}9\\41\end{matrix}\right\}$ 369

PROPOSITIO 90.

Vnusquisque dictorum gnomonum æqualis est aggregato triangulorum centralium ab vnitate per ordinem sumptorum, & tot quot sunt vnitates imparis collateralis. Exempli gratia. 15. gnomo post vnitatem æqualis est aggregato trium triangulorũ centralium. s. 1. 4. 10. quoniam ternarius est impar collateralis ipsius gnomonis secundi. At 65. gnomo sequens æqualis est aggregato quinque triangulorum, scilicet 1. 4. 10. 16. 31. quoniam. s. 5. est impar collateralis dicto gnomoni. & sic deinceps in infinitum. Et quoniam tria talia triangula, per diffinitionem componunt pyramidem triangulam centralẽ tertij loci, & quinque talia prædicta triangula constituunt pyramidem triangulam quinta loci, & sic deinceps per impares locos in infinitũ: propterea propositio pñs hoc dicit.

COROLLARIVM.

Quòd tales gnomones sunt pyramides triangulæ centrales per impares locos dispositæ in infinitum. Cuius propositionis & corollarij demonstratio hæc est. Aio, q 65. gnomo tertij loci, est pyramis triangula centralis quinta. Quod sic patet. Ducatur 5. in 31. radix. s. quinta in triangulum 31. quintũ qui basis est pyramidis ipsius quintæ, & producũtur 155. colũna. s. triãgula quinta huic addo quadratum quintũ primæ speciei. s. 25. & triangulum quintũ. s. 15. & conflãtur 195. qđ, per 79ª huius, triplũ est pyramidis suæ quintæ. productũ aũt ex 5. in 31. cum dictis quadrato & triãgulo, sumptũ, est æquale producto ex 5. in 39. quoniam. s. 39. constat ex 31. 5. & 3. hoc est, triangulo quinto: impare tertio, & radice tertia: & ex tali radice in talem imparem, hoc

est,

$5\left\{\begin{matrix}13 \text{ —— } 65\\39 \text{ —— } 195\end{matrix}\right.$

est ex 3. in 5. fit dictus triangulus quintus 15. (vt ex regula progressionis facile constat) Quo fit, vt productũ ex 5. in 39. æquale sit producto ex 5. in 31. in 5. & in 3. hoc est, producto ex 5. in 31. cum quadrato quinarij & triangulo quinto, hoc est, cum 25. & cum 15. Et, quoniam 31. triangulus, scilicet quintus centralis cum ipso quinario & ternario, quoniam quinarius est tertius impar, conficiunt semper triplum tertij quadrati centralium, qui nunc est. 13. & gnomo 65. fit ex 5. in ipsum 13. per præmissam. Iam iccirco productum ipsum ex 5. in 39. scilicet 195. triplum erit gnomonis 65. fuit autem & triplum pyramidis triangulæ quintæ: Igitur gnomo tertius & pyramis centralis quinta sunt æquales. Quod erat demonstrandum. Sed restat ostendere, quòd triangulus imparis loci cum ipso impare & cum radice collaterali ad imparem faciunt simul triplum quadrati centralis, qui collateralis est ipsi radici. Hoc est assumpto exemplo, quod 31. cum 5. & 3. faciunt triplum ipsius 13. quod sic ostendetur: Disponantur quatuor series numerorum, singulæ ab vnitate initium capientes: in quarum prima sint trianguli centralis locorum imparium, scilicet 1. 10. 31. 64. & in secunda 1. 3. 5. 7. & cæteri impares per ordinem. In tertia radices naturalis progressus 1. 2. 3. 4. &c. In postrema 1. 5. 13. 25. & cæteri quadrati centralis. In quibus id quod volumus facile constabit.

Nam cum in exordio tres vnitates sint

1	10	31	64	109	166	235	316	409	514	Triãg. cẽtrales locorũ impariũ
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	Impares
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Radices.
1	5	13	25	41	61	85	113	145	181	Quadrati centrales.

triplum quartæ. et trium subsequẽtium tres ad primas vnitates augumenta super ipsas vnitates faciant duodenarium, qui numerus triplus est ad augumentum, quo in quarta serie sequens vnitatem excedit ipsam vnitatem; iam ideo necesse erit, vt aggregatum trium corollarium, scilicet 10. 3. 2. sit triplum ad hũc sequentem, scilicet 5. Item quoniam augumenta trium in tertio loco sequentium supra tres præcedentes conflant 24. Et augumentum reliqui in quarta

quarta serie supra suum præcedentem est 8. Idcirco & aggregatum trium illorum, scilicet 31. 5. 3. erit & triplum dicti reliqui, scilicet 13. Et sic deinceps in infinitum, propter augmenta illic per duodenarium, hic per quaternarium crescentia semper demonstrabimus. Quod demum in dictis quatuor seriebus numeri secundum talia procedant crementa, facillimum est ostendere. In triangulis quidem si consideretur continuatorum crementa, quæ crescunt per ternarium, iam alternatorum crementa per duodenarium augebuntur. At in serie imparium quis nescit crementũ fieri per binarium, & in serie radicum per vnitatem? deniq; in serie postrema quadratarum centralium, quoniam singuli constant ex binis proximis quadratis primæ speciei, quorum differentiæ crescunt per binarium, quia videlicet conflatur per additionem continuam imparium, ideo differentias sortiuntur per quaternarium crescentes. Sic nihil restat, quod ad demonstandum propositum faciet.

Δli Centrales loci impares	Drã Δloz continuatorũ.	Drã Δloz in locis impar.
+ 1.		
4.	3	9
+ 10.	6	
19.	9	21
+ 31.	12	
46.	15	33
+ 64.	18	
85.	21	45
+ 109.	24	
136.	27	57
+ 166.	30	

PROPOSITIO 91.

Tres quadrati centrales cum quatuor vnitatibus sumpti, sunt æquales quatuor triangulis centralibus cum tribus vnitatibus simul acceptis in eodem loco. Nam triangulus centralis constat ex vnitate & tribus triangulis primę speciei pręcedentis loci. Quadratus verò centralis constat ex quatuor triangulis primę speciei præcedentis loci, & ex vnitate. Quam ob rem, quatuor trianguli centrales constabunt ex 12. triangulis primæ, & ex quatuor vnitatibus. Tres verò quadrati centralis constabunt ex 12. triangulis primæ, & ex tribus vnitatibus. Igitur, si apponantur hic quatuor, illic tres vnitates, constabit veritas propositi.

PROPOSITIO 92.

Tres pyramides quadratæ centrales cum quatuor axibus sumptæ, sunt æquales quatuor pyramidibus triangulis centralibus cũ tribus axibus in eodem loco simul acceptis. Hæc constat ex præcedenti: quoniam pyramides constant ex basibus, illæ quadratis, hæ triangulis, & axes constant ex totidem vnitatibus singulæ. Quare cùm ex aggregatione æqualium coacervuentur æqualia, constat propositum.

Tres

PROPOSITIO 93.

Tres Pentagoni centrales cum quinque vnitatibus simul sumpti sunt æquales quinque triangulis centralibus cum tribus vnitatibus simul acceptis in eodem loco. Quoniã triãgulus centralis constat ex vnitate & ex tribus triangulis primis præcedentibus. Pentagonus autem centralis constat ex quinque triãgulis primis præcedentibus ex vnitate: quam ob rem quinque trianguli centrales constabunt ex 15. triangulis primis & ex 5. vnitatibus. Tres verò pentagoni constabunt etiam ex 15. triangulis primis, & ex tribus vnitatibus: Igitur si apponantur hic 5, illic tres vnitates, constat propositum.

PROPOSITIO 94

Tres pentagonæ pyramides centrales cum quinque axibus sunt æquales quinq; pyramidibus triangulis centralibus cum tribus axibus eiusdem loci pariter acceptis. Hæc sequitur ex præmissa: quoniã pyramides constant ex planis, illæ pẽtagonis, hæ triãgulis, & axes constant ex totidem vnitatibus singulæ, Igitur cũ ex aggregatione æqualium coaceruẽtur ęqualia, verum est id, quod ostendendum proponitur.

PROPOSITIO 95.

Cubus { Vnitas; { 8. semid. χ; 12. △li +; 6. pyr □tæ χ

Omnis cubus centralis æqualis est octahedro centrali sibi collaterali. Nam talis cubus, per diffinitionem construitur ex vnitate, quod est centrum: ex octo semidiametris, ex 12. triangulis primis: quoniam tot sunt latera linearia solidi: & ex sex pyramidibus quadratis centralibus quot, scilicet sunt bases solidi. Octahedrus autem conflatur ex vnitate centrali, ex senis semidiametris, ex 12. triangulis primis: quoniam tot sunt eius solidi latera, & ex octo pyramidibus triangulis centralibus, propter totidem bases. Sed cum per 92ª pmissam, tres pyramides quadratæ cum quatuor axibus, qui sunt æquales semidiametris singulæ singulis, sint æquales quatuor pyramidibus triangulis cum tribus axibus: Iam sex pyramides quadratæ cum octo semidiametris erunt æquales octo pyramidibus triangulis cum sex semidiametris. At vnitas & 12. trianguli eãdem vtrobique summã ingerunt. Ergo & totus solidus numerus toti solido numero, scilicet cubus Octahedro adæquabitur: quemadmodum proponitur.

Octahedrus { Vnitas; { 6. semid. χ; 12. △li +; 8. Pyr. △læ χ

PROPOSITIO 96.

Omnis Dodecahedrus numerus æqualis est Icosahedro numero sibi collaterali. Sicut præmissa, per nonagesimã secundam

ita

ita pũs propositio per 64ª demonstrabitur. Nãque, per suppositionem nostram, icosahedrus conficitur ex vnitate, quod est centrum: ex 12. semidiametris, ex 30. triangulis primis, secundum laterum numerum solidi: & ex 20. pyramidibus triangulis centralibus, iuxta numerum basium. Dodecahedrus autem numerus formabatur item ex vnitate centrali, ex viginti semidiametris, ex triginta triangulis primis, propter totidem latera, & ex 12. pyramidibus pentagonis centralibus, quot sunt solidi bases. Sed cum per 94ª præmissam, tres pentagonę pyramides cum quinque axibus; siue semidiametris sunt æquales quinq; pyramidibus triangulis cum tribus axibus, siue semidiametris: iam & 12. Pentagonæ Pyramides cum 20. semidiametris simul, æquales erunt 20. pyramidibus triangulis cum 12. semidiametris. Atque vnitas & triginta trianguli tantundem vtrobique accumulant. Igitur ex totus icosahedrus toti dodecahedro æqualis erit, sicut in propositione concluditur.

Icosahedrus { Vnitas |; { 12. semid. χ; 30. △li +; 20. pyr. △læ χ

Dodecahedrus. { Vnitas |; { 20. semid. χ; 30. △li +; 12. pyr. ⬠næ χ

PROPOSITIO 97ª.

Vnitas, quatuor diametri, hoc est, par numerus, quẽ voco diametrum, quadruplicatus cum octuplo trianguli primi, vno retro intermisso accepti, componunt quadratum imparis collateralis. Disponantur quatuor numerorum series ab vnitate, scilicet trianguli primi, pares, impares & imparium quadrati per ordinem. Et in ordine parium capiatur quilibet par, vtputa 8. ex triangulis autem capiatur, vno intermisso præcedens, scilicet 6. octuplicatus, hoc est, 48. Aio igitur, quòd vnitas, quadruplum ipsius 8. scilicet 32. simul cum 48. conficiunt quadratũ collateralis imparis, scilicet 81. Nam per 54ª huius, vnitas cum 48. quod est octuplum trianguli 6. facit quadratum imparis sequentis, scilicet 49. qui quadratus est ipsius 7. per 60ª verò huius, ipse numerus par 8. quadruplicatus, scilicet 32. coniunctus cum quadrato imparis præcedentis, scilicet cum 49. efficit quadratum collateralis imparis, scilicet 81. Igitur vnitas cum 32. & 48. constant quadratum collateralis imparis prædicti, similiter in cæteris horum quatuor ordinum numeris per eadem penitus argumentando procedens, sicut demonstrandum proponitur.

1, 48 } 49; 49, 32 } 81

1	3	6	10	15	21	2	36	45	55	Trianguli primi.
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	Pares
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	Impares
1	9	25	49	81	121	169	225	289	361	Quadrati impariũ.

PROPOSITIO 98ª.

Quadruplum dicti trianguli, vno intermiſſo præcedentis imparem, cum ſexcuplo pyramidis quadratæ centralis immediate dictum imparem præcedentis coniunctum, conficit duo ſupplementa, quæ ſingula fiunt ex ductu ipſius imparis in latus ſecundi quadrati præcedentis: & coniuncta cum quadrato ipſius imparis conſtituunt gnomonem: qui coniunctus cum ſecundo quadrato prædicto, conſtruit ſecundum quadratum ſequentem, hoc eſt, ipſius imparis collateralem. Intelligo ſecundos quadratos eos, qui ex primis in ſe ductis fiunt: vt 16. eſt ſecundus quadrat⁹ binarij 81. ſecũdus quadratus ternarij; & ſic deinceps. Itaque exponam primum, dein oſtendam propoſitionem. Exponatur ab vnitate ſex numerorũ ſeries, ſcilicet, radices, Impares Trianguli primi, Pyramides quadratæ cẽtrales, quadrati primi, & gnomones ſecundorum quadratorum, per ordinem continuati. Quibus exaratis, iam in ſecundo loco, impar eſt 3. hic autem quadruplum triãguli nullum eſt. Nam retro intermiſſa vnitate, nullus eſt triangulus. pyramis hunc locum pręcedẽs, eſt vnitas eius, ſexcupluseſt ſenarius: qui ſolus facit hìc duo ſupplementa 3. & 3. quæſingula fiũt ex impare huius loci, ſcilicet ex 3. in latus ſecundi quadrati præcedentis, ſcilicet vnitatis, hoc eſt, in vnitatem. Et coniuncta cum quadrato dicti imparis, ſcilicet cum nouem, conficiunt 15. gnomonem, ſcilicet eiuſdem loci: qui applicatus ſecundo quadrato prædicto, ſcſlicet vnitati, cõſtruit iam ſecundum quadratum ſequentem, ſcilicet 16. In tertio autem loco, impar eſt 5. quadruplum trianguli, vno retro intermiſſo, ſumpti, ſcilicet vnitatis, eſt quatuor. Pyramis præcedens eſt 6. cuius ſexcuplum 36. qđ cum 4. facit 40. quæ ſunt duo ſupplementa, ſcilicet 20. & 20. quæ ſingula fiunt ex impare dicto, ſcilicet 5. in 4. latus ſecundi quadrati præcedentis, qui eſt 16. & coniuncta cum quadrato dicti imparis, ſcilicet cum 25. faciunt 65. gnomonem tertium: qui cõiunctus cũ ſecundo quadrato prædicto, ſcilicet 16 conflat iam ſecudum quadrarum ſequẽtem, ſcilicet 81. In quarto deinde loco,

loco, impar eſt 7. quadruplum trianguli vno retro intermiſſo, ſumpti, ſcilicet ternarij, eſt 12. Pyramis præcedens eſt 19. cuius ſexcuplum 114. quod cum 12. facit 126. quæ ſunt duo ſupplemẽta, ſcilicet 63. & 63. quæ ſingula fiũt ex impare dicto 7. in 9. latus, ſcilicet ſecundi quadrati præcedentis, qui fuit 81. & coniuncta cum quadrato dictæ imparis, ſcilicet 49. faciunt 175. gnomonem quartum, qui coniunctus ſecundo quadrato prædicto, ſcilicet 81. facit 256. ſecundum quadratum ſequentem. Adhuc in quinto loco, impar numerus eſt 9. quadruplum trianguli non immediate præcedentis, ſcilicet 6. eſt 24. pyramis præcedens 44. cuius ſexcuplum 264. quod cum 24. efficit 288. quæ ſunt duo ſupplementa, ſcilicet. 144. & 144. quæ ſingula fiunt ex Impare dicto, ſcilicet 9. in 16. latus ſcilicet, quadrati ſecundi præmiſſi, qui fuit 256. & coniuncta cum quadrato dicti imparis, ſcilicet cum 81. faciunt 369. gnomonem iungendum ſecundo quadrato prædicto, ſcilicet 265. Vt cõflet 625. quadratum ſecundum quinarij: qui ſequitur, poſitus in præſenti loco. Sic pro ſexto, ſeptimo, & ſequentibus locis in infinitum fit ſimiliter ſeriatim procreando, ſecundos radicum quadratos. Sed demonſtrandum, quo pacto in ſingulis locis quadruplum trianguli, ex tertio retrorſum loco ſumpti, cum ſexcuplo pyramidis quadratæ præcedentis coniunctum, facit dicta duo ſuplementa, ſiue (quod idem eſt) quòd duplum talis trianguli cum triplo talis pyramidis coniunctum, facit vnum tale ſupplementum, quòd (vt dictum eſt) fit ex impare ipſius loci in latus ſecundi quadrati præcedentis: & proinde duo talia ſupplementa coniuncta cum quadrato dicti imparis, componunt gnomonẽ, qui iunctus cũ ſecundo quadrato prædicto conficit ſm quadratum ſequentem, imparíq; collateralẽ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Radices
1	3	5	7	9	11	13	15	17	17	Impares
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	Trianguli primi
1	6	19	44	85	146	231	344	489	670	Pyr. quadr. centrales
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	Quadrati primi.
1	15	65	175	369	671	1105	1695	2465	3439	Gnomones 2ⁱ

Verùm in primo post vnitatem loco, qui secundus appellatur, in quo (vt dixi) quadratum triangulæ nullum est, liquet quòd triplum pyramidis præcedentis, scilicet 3. facit tale supplementum, quod scilicet fit ex impare huius loci, qui ternarius est, in latus secundi quadrati præcedentis, scilicet in vnitatem: & idcirco per quartam secundi Euclidis, duo huiusmodi supplementa coniuncta cum quadrato dicti imparis, scilicet 9. conficiunt 15. gnomonem, scilicet eiusdem loci: qui appositus secundo quadrato prædicto, scilicet vnitati, construit secundum quadratum sequentem, scilicet 16. collateralem ipsius imparis: cuius quidem latus est quadratus ipse primus, scilicet 4. quoniam tale latus ex aggregatione constat vnitatis & sequentis imparis, per 15^a huius libri. In tertio loco id ipsum quoque ostendemus: in quo impar est 5. quadruplum trianguli 4. & pyramidis sexcuplum 36. & ideo trianguli duplum 2. pyramidis triplum 18. Quare hic ostendendum est, quòd 2. cum 18. faciunt 20 supplementum quod fit ex impare huius loci scilicet 5. in latus secundi quadrati præcedentis, hoc est, in 4. quod sic patet: Nam columna quadrata centralis præcedentis loci, scilicet 10. cum duplo quadrati primi eiusdem loci, scilicet cũ 8. per 80^a huius, efficit triplum pyramidis eiusdem loci, quę quæ fuit 6. hoc est 18. Cui numero addo 2. parte altera longiorem eiusdem loci, & fiunt 20. Cumque 10. columna dicta fiat ex radice eiusdem loci, scilicet 2. in quadratum centralem collateralem, scilicet in 5. atq; ipse 5. constet ex quadrato primo collaterali & præcedenti, hoc est, ex 4. & 1. iam ipse 10. fit ex 2. in 4. & ex 2. in 1. coniunctus cum 2. parte altera longiore, hoc est totus 4. fiet ex 2. in 2. quod est aggregatum ex 1. & 1. Sic habemus tria producta, scilicet 8. ex 2. in 4. quod fuit duplum quadrati cum columna coniunctum. Item 8. & ex 2. in 4. atque 4. ex 2. in 2. integrãtiam totum numerum 20. cumque ex toto numero 20. ipse octonarius contineat bis 4. & rursum 8. bis 4. demonstrandum est quod reliquum, scilicet 4. contineat semel ipsum 4. vt totus 20. contineat quinquies, scilicet secundum numerum imparem huius locum, ipsum quatuor. Quod iam ratione comprobatur: quoniam scilicet 4. fit ex radice secundi loci, hoc est, ex 2. in parte altera longiore eiusdem loci, scilicet in 2. Et perinde factus adequatur quadrato collaterali, scilicet 4. sicut & radix æqualis est ipsi parte altera longiori. Producitur

2 — 5 — 10

$2\left\{\begin{array}{l}4 — 8\\ 1 — 2\\ 1 — 2\end{array}\right.$

2 — 4 — 8

citur itaque in hoc loco 20. supplementum ex 5. in 4. & perinde duo talia supplementa, scilicet 20. & 20. coniuncta cum 25. quod est quadratum ipsius 5. imparis, faciunt gnomonem 65. qui coniunctus cum quadrato ipsius 4. scilicet cum 16. quadrato secundo præcedentis loci, scilicet secundi, constituit sequentem quadratum secundum, collateralem, scilicet huic loco tertio, qui est 81. Nam per 4^a secundi Euclidis, supplementa duo ex lateribus quadratorum duorum producta, vnà cum ipsis quadratis componunt quadratum, cuius latus constat ex lateribus quadratorum componentium. Sed vnum laterum talium fuit quadratus numerus, scilicet 4. & alterũ fuit sequens impar, scilicet 5. Ergo & compositus ex illis, per 15^a huius libri, erit quadratus sequens, scilicet 9. latus scilicet totalis quadrati: & perinde totalis quadratus erit quadratus secundus ternarij, scilicet 81. qui ex 9. in se fit. In quarto etiam loco nunc demonstrationem repetemus: in quo impar est 7. quadruplũ trianguli est 12. sexcuplum pyramidis 114. & ideò trianguli 6. triplum pyramidis 57. Quare hic ostendendum est, quòd 6. cum 57. efficit 63. supplementum, quod fit ex impare huius loci, scilicet 7. in latus secundi quadrati præcedẽtis, hoc est in 9. quod sic patet. Nam columna quadrata centralis præcedẽtis loci, scilicet 39. cum duplo quadrati primi eiusdem loci, scilicet cum 18. efficit, per 80^a huius triplum pyramidis eiusdem loci, hoc est 57. Cui numero adijcio 6. parte altera longiorem eiusdem loci: & fiunt 63. Cumque 39. columna dicta fiet ex radice eiusdem loci, scilicet 3. in quadratum centralem collateralem, scilicet in 13. atque ipse 13. constet ex duobus quadratis primis, scilicet, collaterali, & præcedenti, hoc est, ex 9. & 4. iam ipse 39. fiet ex 3. in 4. & ex 3. in 9. At ipse 6. parte altera longior, fit ex 3. in 2. Ergo 12. qui fit ex 3. in 4. coniunctus cum 6. parte altera longiore, scilicet 18. fiet ex 3. in 6. quod est aggregatum ex 4. & 2. Sic habemus tria producta, scilicet 18. ex 2. in 9. quòd fuit duplum quadrati cum columna coniunctum. Item 27. ex 3. in 9. Atque 18. ex 3. in 6. integrantia totum 63. Cumque ex toto numero 63. ipse 18. contineat bis 9. & ipse 27. contineat ter 9. demonstrandum est, quòd residuum scilicet 18. continet bis 9. vt videlicet totus 63. concludatur continere septies ipsum 9. secundũ imparem. scilicet huius loci, qui septenarius est. Quod & ratione confirmatur.

3 — 13 — 39

$3\left\{\begin{array}{l}9 — 27\\ 4 — 12\\ 2 — 6\end{array}\right.$

2 — 9 — 18

Quoniā 18. producitur ex radice tertij loci. ſ. 3. in 6. parte altera longiorē eiuſdem loci: & perinde productus duplus eſt ad quadratū eiuſdem loci, ſcilicet ad 9. quotuplus eſt parte altera longior ipſius radicis. Producitur itaque in hoc loco ſupplementū 63. ex 7. in 6. Et perinde duo talia ſupplemēta 63. & 63. coniuncta cum 49. quadrato ipſius imparis, faciūt gnomonem 175. Qui coniunctus cum quadrato ipſius 9. ſ. cum 81. quadrato ſecundo pręcedētis loci. ſ. tertij, cōponūt quadratum ſecundum ſequentem. ſ. 256. collateralem, hoc eſt, huius quarti loci. Nam, per 4ª ſecundi Euclid. duo quadrata & duo ſupplementa ex lateribus quadratorum producta pariter accepta, cōficiunt quadratum totalem: cuius latus eſt aggregatum ex lateribus quadratorum partialium. Cumque vnum horum laterum fuerit iam quadratus numerus, ſcilicet 9. & reliquum impar numerus ſequens. ſ. 7. iam aggregatum ex ipſis, totalis ſcilicet quadrati latus erit, per 15ª huius, erit quadratus ſequens, ſcilicet 16. latus, ſcilicet totalis quadrati. Vnde totalis quadratus erit quadratus ſecundus, ſcilicet 256. qui fit ex 16. in ſe. Lubet & in quinto loco demum propoſitum demonſtrare. In quo quidem impar eſt 9. quadruplum trianguli ſæpe dicti 24. ſexcuplum pyramidis 264. & ideo duplum trianguli 12. triplum pyramidis 132. Quare hìc oſtendendum, quòd 12. cum 132. efficit 144. ſupplementum, qđ fit ex impare huius loci, ſcilicet 9. in latus ſecundi quadrati præcedentis, ſcilicet in 16. Quod ſic poteſt concludi: Nam per 80. huius columna quadrata centralis præcedentis loci, ſcilicet 100. cum duplo quadrati primi eiuſdem loci, ſcilicet cum 32. efficit triplū pyramidis ſuæ eiuſdē loci, quæ fuit 44. hoc eſt 132. cui numero addo ipſum 12. parte altera longiorem, & conficio 144. cumque 100. columna prædicta fiat ex radice eiuſdem loci, ſcilicet 4. in quadratum centralem collateralem, ſcilicet in 25. atq; ipſe 25. conſtet ex duobus quadratis primis, ſcilicet collaterali & præcedenti, hoc eſt, ex 16. & 9. iam ipſe 100. fiet ex 4. in 16. & ex 4. in 9. At ipſe 12. parte altera longior fit ex 4. in 3. Ergo 36. qui fit ex 4. in 9. coniunctus cum 12. ſcilicet totus 48. fiet ex 4. in 2. quod eſt aggregatum ex 9. & 3. Sic habemus tria producta: ſcilicet 32. ex 2. in 16. quod fuit duplum quadrati cum columna coniunctum: 64. ex 4. in 16. atque 48. ex 4. in 12. integrantia totum 144. Cumque ex toto numero 144. ipſe 32. cōtineat bis 16. & ipſe 64. quater

4 —— 25 —— 100.
16 —— 54.
4 { 9 —— 36.
3 —— 12.
2 —— 16 —— 32.

loc⁹ 2° 2—bis, 1—ſemel, 0—nihil } ter — 1.
—— 3
3° 8—bis, 8—bis, 4—ſemel } qnqes — 4
—— 20
4° 18—bis, 27—ter, 18—bis } ſepties — 9
—— 63

16. do-

16. demonſtrandum reſtat, quòd reſiduum ſcilicet 48. contineat ter 16. vt ſcilicet totus 144. comprehēdat nouies 16. iuxta imparem huius loci, ſcilicet 9. quod, ſicut prius, facilè oſtenditur. Quoniam 48. producitur ex radice quarti loci, ſcilicet 4. in 12. parte altera longiorem eiuſdem loci. Et idcirco productus eſt triplus ad quadratum collateralem, ſcilicet ad 16. quotuplus eſt parte altera longior ipſius radicis. Producitur itaque in hoc loco ſupplementum 144. ex 9. in 16. & ideo duo talia ſupplementa, ſcilicet 144. & 144. coniuncta cum 81. quadrato ipſius imparis 9. faciunt gnomonem 369. qui coniunctus cum quadrato ipſius 16. ſcilicet cum 256. quadrato ſecundo præcedentis loci, ſcilicet quarti, componit ſequentem quadratum ſecundum, ſcilicet 625. huius quinti loci. Nam per quartam ſecundi Euclidis, duo quadrata, & duo ſupplemēta ex lateribus quadratorum producta pariter accepta, conficiunt quadratum totalem: cuius latus eſt aggregatum ex lateribus quadratorū partialium. Cumque vnum horum laterum fuerit quadratus numerus, ſcilicet 16. & reliquum impar numerus ſequens, ſcilicet 9. iam per 15ª huius aggregatus ex ipſis, totalis ſcilicet quadrati latus, erit numerus quadratus, ſcilicet 25. Vnde totale quadratum erit quadratus ſecundus, ſcilicet 625. qui fit ex 25. quadrato huius quinti loci in ſe multiplicato. Similiter in ſexto, ſeptimo, octauo, & cæteris deinceps locos in infinitum continuabitur hęc demonſtratio. Namque in ſexto loco argues tria producta integrantia ſupplementum, continere præcedentem quadratum vndecies. In ſeptimo loco tredecies, in octauo quindecies, in nono ſeptemdecies, in decimo vndeuigeſies. & ſic deinceps per impares ſequentes: vt hic in margine notaui, quo conſtet propoſitum.

5° 32—bis, 64—q̃ter, 48—ter } nouies — 16
—— 144
6° 50—bis, 125—qnqes, 100—quater } vndecies — 25
—— 275
7° 72—bis, 216—ſexies, 180—qnqies } tredecies — 36
—— 468
8° 98—bis, 343—ſepties, 294—ſexies } qndecies — 46
—— 735
9° 128—bis, 512—octies, 448—ſepties } 17ties — 64
—— 1088
10° 162—bis, 729—nouies, 648—octies } 19ties — 81
—— 1539
11° 200—bis, 1000—decies, 900—nouies } 21ties — 100
—— 2100

Et ſic deinceps in infinitum. Et productum medium ſemper eſt Cubus pręcedentis loci.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Radices.
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	Impares
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	Trianguli primi
1	6	19	44	85	146	231	344	489	670	Pyramides quadrati centrales
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	Quadrati primi
1	15	65	175	369	671	1105	1695	2465	3439	Gnomones.

PROPOSITIO 99a.

Gnomones prædicti, sicut dictum est inuenti, Cubi sunt & Octahedri centrales. Nam cùm vnusquisq; talium gnomonū constet ex duobus supplemētis & ex quadrato imparis, atq; per præmissam talia supplemēta cōstent ex quadruplo tertij retrorsum sumpti trianguli primi, & ex sexcuplo pyramidis quadratæ centralis præcedētis: Itemque, cum, per ante præmissam, quadratus dicti imparis constet ex aggregatione vnitatis, quatuor diametrorum, siue octo semidiametrorum & ex octuplo dicti trianguli; idcirco sequitur, vt talis gnomo construatur ex aggregatione vnitatis, octo semidiametrorū, duodecim taliū triangulorū, & sex pyramidū dictarum. Verùm, per diffinitionē cubi centralis, ipse cubus ex taliū quatuor numerorū cumulo cōpaginatur, ex quib9 talis gnomo. Igitur gnomo existet cubo æqualis. Per 95a verò præmissam, cubus octahedro æqualis esse constitit: igitur & octahedrus gnomoni æqualis erit, sicut demonstrandum proponitur.

□. imp. { Vnitatem / 8. semid. / 8. △los }

Gnomo 2us

duo suppl. { 4. △los / 6. pyr. □. }

Cubus centra. { vnitatē. / 8. sem. / 12. △los / 6. pyr. □. }

COROLLARIVM.

Et quoniam per 90e corollarium ostēsum fuit, quòd gnomones præfati sunt pyramides triangulæ centrales imparium locorum, idcirco sequitur, vt gnomones, cubi, octahedri cētrales, & pyramides triangulę centrales imparium locorum ordinatim collati, sint ijdem numeri.

PROLOGOMENA.

Restat adhuc nobis ostendendum, quòd sicut contingit cubos primi generis fieri ex congerie vnius, duorum, trium, & deinceps imparium per ordinem ab vnitate succedentium singulos ab vnitate continuatos in infinitum; ita & cubis centralibus similem dignitatem esse à natura tributam: vt scilicet ipsi cubi centrales ab vnitate seriatim dispositi singuli constituantur ex aggregato vnius, trium, quinque, septem, & deinceps imparium successiue sumptorum ab vnitate imparium numerorum, semperq; sub multitudine imparium per ordinem accepto. Demonstrabimus autem hoc, præmissis aliquod necessarijs præambulis.

PROPOSITIO 100a.

Si fuerint tres, quinque, septem, vel sub alterius cuiuslibet imparis multitudine sumpti numeri æquali excessu & successiuè crescentes; eorum aggregatum æquum erit ei numero, qui ex ductu medij in multitudinem multiplicati procreabitur.

Exempli gratia, sint tres numeri 3. 5. 7. Aio, quòd 5. qui est medius ductus in ternarium (quandoquidem tres sunt numeri) efficit aggregatum ipsorum 3. 5. 7. Ad socientur enim ipsis 3. 5. 7. per binarium crescentibus totidem 7. 5. 3. & ijdem, sed ordine præpostero, decrescentes: Sic fiet, vt decrementum vnius ordinis resarciatur pari cremento alteri9: & duo medij, scilicet 5. & 5. sint inuicem ęquales; & simul iuncti sint ęquales aggregato reliquarum combinationum. Quo fit, vt congeries amborum ordinum sit planus numerus siue superficialis tetragonus, qui fit ex ductu ternarij in aggregatum ipsorum 5. & 5. seu quorumlibet binorum: Igitur & congeries vnius ordinis (quæ dimidia est totalis cumuli) fiet ex ductu quinarij in ternarium: sicut proponitur. Similiter, si summantur quinq; numeri: vtpote 9. 11. 13. 15. 17. eadem accessione crescentes. Aio similiter, quòd medius eorum, scilicet 13. in quinarium (quoniam quinque sunt numeri) multiplicatus producit talium quinque numerorum aggregatum. Nam si talibus numeris compares & sub ordine præpostero applicentur, similiter, & in quouis alio casu, constabit propositum.

1 — 1
3 — 7
5 — 5
7 — 3

3 } 15
5 }

9 — 17
11 — 15
13 — 13
15 — 11
17 — 9

5 } 65
13 }

PROPOSITIO 101a.

Si ex radicibus ab vnitate, & secundùm vnitatis accessum crescentibus quotlibet segregentur vnitas & deinde ex sequentibus tres, inde quinque, & deinceps per multitudinem imparium sequentium per ordinem; iam vnitas, tertius triū, quintus sequētiū quinque & deinceps postremus semper reliquarum multudinum quadratus numerus est. Quòd enim vnitas quadratus sit, patet. Quòd autem tertius sequentium sit quadratus, concluditur, quoniam addit tres vnitates, hoc est, sequentem imparem vnitati: & perinde, per 15a huius, aggregatum, hoc est, ipse tertius dictus, est sequens ab vnitate quadratus. Item quinque sequentes per vnitatem singulæ crescentes faciunt, vt quintus eorum excedat supradictum tertium quinque vnitatibus, hoc est, ipso 5. impari tertio: vnde per 15. huius, aggregatum, hoc est, ipse quintus prædictus erit tertius quadratus. Adhuc septem succedentes numeri cum totidem vnitates, hoc est, 7. quartum imparem addant, iam similiter aggregatum, hoc est, septimus huius multitudinis, erit quadratus quartus per dictam 15a & sic in infinitum, sicut demonstrandum proponitur.

1

2 }
3 } 3
4 }

5 }
6 }
7 } 5
8 }
9 }

10 }
11 }
12 }
13 } 7
14 }
15 }
16 }

1 — 1
3, 5, 7 } 16
9, 11, 13, 15, 17 } 81
19, 21, 23, 25, 27, 29, 31 } 256
33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49 } 625

COROLLARIVM

Manifeſtum eſt ergo, quòd in eadem diſpoſitione numerorum, primus, quartus, nonus, ſedecimus, & cæteri ſegregatarum multitudinum ſecundum impares numeros, poſtremi ſunt ipſi radicũ ab vnitate ſumptarũ p ordinẽ quadrati.

PROPOSITIO 102^a.

Si ex numeris ab vnitate continuatim diſpoſitis imparibus in infinitum, ſegregetur vnitas, & ex ſequentibus tres, & inde quinque, & deinceps aliæ multitudines ſemper ſecundum impares ſucceſſiue numeros: tunc ſi vnitas, & dictæ ſequẽtes multitudines ſingillatim coaceruentur: Vnitas & aggregata ipſa ſingula erunt quadrati quadratorum à radicibus per ordinem ab vnitate diſpoſitis in ſe multiplicetis factorum. Hos quadratos quadratorum nuper quadratos ſecundos appellauimus. Quod igitur vnitas primus imparium ſit quadratus quadrati vnitatis, conſtat per ſe: quandoquidem vnitas in ſe ducta ſemel atque iterum ſemper vnitatem producit. Quod autem tres ſequentes cum vnitate coniuncti conficiunt quadratum, conſtat per 15^a huius: & quoniam vnitas & tres ſequentes impares per quatuor aggregationes cõficiunt totidem quadratos: iam idcirco vltima eorum congeries erit quartus quadratus, hoc eſt, quadratus quartæ radicis. Sed per præcedentem, eiuſque corollarium, quarta radix numerus quadratus eſt: igitur talis congeries eſt quadratus quadrati quarti, hoc eſt, quadratus ſecundus binarij. Similiter oſtendemus, quòd quinque ſequẽtes impares ad talem quadratum ſecundum appoſiti, efficiẽt quadratum nonę radicis: ſed nona radix, per præmiſſam & ſuum corollarium, tertius quadratus erat: igitur talis cumulus erit quadratus ſecundus ſequens, hoc eſt, quadratus nouenarij, ſcilicet quadratus ſecundus ternarij. Non aliter, ſi tali quadrato ſecundo applicentur ſeptẽ impares ſequentes, conflabunt quadratum ſedecimæ radicis per 15^a. Cumq; radix ſedecima, per præmiſſam & ſuum corollarium, ſit quadratus quartus. Iam tale conflatum erit quadratus ſecundus ſequens, hoc eſt, quartæ radicis, ſiue quadratus quarti quadrati, hoc eſt, ſedenarij. Adhuc ſi huic quadrato ſecundo accumulentur nouem impares ſequentes, conſtituetur quadratus ſecundus ſequens, hoc eſt quintæ radicis, ſiue quadratus ex 25. in ſe multiplicato factus. & ſic in infinitum. Quod demonſtrandum proponitur.

1 — 1
+ 3, 5, 7 } 15
9, 11, 13, 15, 17 } 65
19, 21, 23, 25, 27, 29, 31 } 175
33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49 } 369

PROPOSITIO 103^a.

Iiſdem ſuppoſitis demonſtrandum eſt, quòd vnitas, aggregata trium ſequentium imparium, quinque ſequentium imparium: itemq́ue ſeptem, nouem, & cæterarum ſub imparibus per ordinem ſequentium multitudinum, ſingula ſunt gnomones, ex quorum continua ad monadem adiectione conſtituuntur ſeriatim ipſi, de quibus loquimur, quadrati quadratorum. Nam, cum per præcedentem, huiuſmodi aggregata monadi ſucceſſiue adiecta conficiant per ordinem ipſos quadratos quadratorum: ſequitur, vt ipſa ſingula aggregata ſint gnomones, qui ad monadem continuatim adiecti conſtituunt tales quadratorum quadratos, ſicut propoſitio concludit.

PROPOSITIO 104^a.

Iiſdem adhuc ſuppoſitis demonſtrandum eſt, quòd in talibus aggregatis ſingulis, ipſius imparium multitudinis medij ſunt per ordinem ab vnitate ſumpti quadrati centrales. Nam tales medij poſt vnitatem impares ſunt 5.13.25.41.& cęteri. Dico igitur, ꝙ hi ſunt quadrati centrales. Nam per propoſitionem 100^a præmiſſam, ex ternario primę multitudinis in medium imparem, ſcilicet 5. fit aggregatum numerorum ipſius multitudinis. ſed per præcedentem, tale aggregatum eſt gnomon. Similiter in quinario ſecundæ multitudinis 5. in 13. facit aggregatum totius multitudinis, per 100^a & per præmiſſam, tale aggregatum eſt gnomon ſequens. Item in ſeptenario ſequentis multitudinis 7. in 25. medium producit aggregatum ipſiꝰ multitudinis per 100^a hoc eſt, gnomonem ſequentem per præmiſſam. Adhuc in nouenario ſequentis multitudinis 9. in 41. medium producit congeriem ipſius multitudinis per 100^a, hoc eſt, gnomonem qui ſequitur, per præmiſſam: & ſic deinceps in infinitum. Verùm, per 89^a huius, tales impares per ordinẽ multiplicati in quadratos centrales ſibi collaterales producunt gnomones eoſdem, qui ſcilicet quadratos quadratorum cõſtituunt. Neceſſe eſt ergo, vt tales medij multitudinum ſingularum impares ſint quadrati centrales: quemadmodum proponitur.

COROLLARIVM.

Qui quidem Gnomones ſunt cubi & octahedri centrales, & pyramides triangulæ centrales locorum imparium, vt in 99^a eiuſque Corollario fuit concluſum.

PROPOSITIO 105^{a}.

Omnis cubus, siue octahedrus centralis cum impari collaterali coniunctus, æquiualet duplo tetrahedri centralis. Cum enim numerus basium octahedri ad numerum basium tetrahedri sit duplus: itemque numerus laterum illius ad numerum laterum huius duplus, iam impar appositus facit, vt vnitas centralis cum semidiametris octahedris sint (additione facta) duplum vnitatis centralis & semidiametrorum tetrahedri. Sunt enim semidiametri octahedri sex, & semidiametri tetrahedri quatuor. Et idcirco oportet adijcere ad summam octahedri duas semidiametros, hoc est, parem collateralem, & vnitatem, ad duplicandam vnitatem centralem: quæ cum pari facit imparem collateralem. Constat igitur propositum.

PROPOSITIO 106^{a}.

Ex aggregato duarum proximarum radicum in aggregatum quadratorum ex eis multiplicato, producitur numerus qui cum ipso radicum aggregato coniunctus facit duplum aggregati cuborum earundem. Exempli gratia 2. & 3. sunt duæ proximæ radices, quarum congeries 5. quadrati autem 4. & 9. cubi vero 8. 27. quadratorum cumulus 13. cuborum verò 35. Dico igitur, quòd id, quod fit ex 5 in 13. scilicet 65. coniunctum cum 5. facit duplum ipsius 35. Exponatur vnitas cum radicibus 2. & 3 & quadrati 4. & 9. cum medio proportionali 6. Itemque cubi octo & 27. cum duobus medijs proportionalibus 12. & 18. in quibus propter proportionem numerorum, quoniam ex 2. in 4. fit 8. & ex 3. in 4. fit 12. idcirco ex aggregato 2. & 3. in 4. fit aggregatum ipsorum 8. ex 12. Non aliter ostendam quòd ex dicto 2. & 3. aggregato in 9. fit ipsorum 18. & 27. aggregatum, sicut in 89^{a} demonstrauimus. Vnde ex aggregato ipsorum 2. & 3. in aggregato ipsorum 4. & 9. hoc est, ex 5. in 13. fiet aggregatum ipsorum quatuor numerorum 8. 12. 18. 27. Demonstrandum est igitur, quòd aggregatum talium quatuor numerorum. cum aggregato radicum, scilicet cum 5. facit duplum aggregati ipsorum 8. & 27. hoc est, quod 65. cũ 5. est duplũ ipsius 35. siue q̃d aggregatũ ipsorum 18. & 12. cũ 5. coniunctum, est ęquale aggregato ipsorũ 8. & 27. Quod facile demõstratur: Nã 12. superat 8. in 4. At ipse 18. superatur à 27. in 9. Tanto igitur aggregatum ipsorũ 18. & 12. superatur ab aggregato ipsorum 8. & 27. quanto 9. maior est quàm 4. Sed 9.

1
2 . 3
4 . 6 . 9
8 . 12 . 18 . 27

1
3 . 4
9 . 12 . 16
27 . 36 . 48 . 64

1
4 . 5
16 . 20 . 25
64 . 80 . 100 . 125

Et deinceps similiter pro reliquis.

maior est quàm 4. in aggregato ipsorum 2. & 3. hoc est, in 5. ergo aggregatum 18. & 12. superatur ab aggregato ipsorum 8. & 27. in 5. Quare aggregatum ipsorum 18. & 12. cum 5. coniunctum, fit æquale aggregato ipsorum 8. & 27. Quod fuit ostendendum. Similiter pro duabus quibuslibet proximis radicibus argumentando procedam. Sicut proponitur.

PROPOSITIO 107^{a}.

Omnis cubus centralis cum impari collaterali coniunctus, conficit duplum aggregati cuborum primi generis collateralis & præcedentis. Nam numerus, qui fit ex aggregato radicum duarum, scilicet propositi loci, & præcedentis, hoc est, ex impari collaterali in aggregatum quadratorum collateralis, & pręcedentis, hoc est, in quadratum centralem collateralem, est per 89^{a} huius, gnomon collateralis in quadratis quadratorum. Et per 99^{a} huius, talis gnomon est cubus centralis. Verùm talis numerus cum aggregato radicum collateralis & præcedentis, hoc est, cum impari collaterali coniunctus, efficit per præmissam, duplum aggregati cuborum collateralis & præcedentis, hoc est, cuborum ipsarum radicum. Igitur cubus centralis cum impari collaterali coniunctus, facit ipsum tale cuborum duplum: quod est propositum.

PROPOSITIO 108^{a}.

Omnis cubus primi generis, cum præcedenti cubo coniunctus, conficit collateralem tetrahedrum centralem. Nam, per 105^{a} præmissam, cubus centralis cum impari collaterali coniunctus, conflat duplum tetrahedri centralis. Et per præcedentem, idem cubus centralis cum impari collaterali coniunctus, efficit duplum aggregatum cuborum collateralis & pręcedentis. Igitur tale cuborum duplum, ęquum est duplo tetrahedri. Et perinde cuborum aggregatum æquale erit ipsi tetrahedro centrali: quod est propositum.

PROPOSITIO 109^{a}.

Omnis tetrahedrus centralis potest esse cubus centralis tertii generis, hoc est cubus mixtus, compositus scilicet ex cubis primi generis collaterali & præcedenti. Vocamus autem huiusmodi cubum mixtum: quoniam ex mixtura duorum cuborum primi generis compaginatur: sicut & quadratus centralis conficitur ex combinatione duorum primi generis quadratorum, scilicet collateralis & præcedentis. Cum igitur, per præmissam, tetrahedrus constet ex collaterali & præcedenti primi generis, cubis: & ex eisdem cubis constet cubus mixtus collateralis, per suam diffinitionem iam satis constat propositum.

Propositio 110ª.

Omnis icosahedrus cum quadruplo imparis collateralis coniunctus, conficit quincuplum collateralis pyramidis centralis. Et hoc quoniam numerus basium icosahedri ad numerum basium pyramidis centralis, scilicet 20. ad 4. quincuplus est. Item numerus laterum linearium illius ad numerum laterum linearium huius, scilicet 30. ad 6. quincuplus est, & ideo aggregatum pyramidum triangularium componentiũ icosahedrum ad aggregatum pyramidum triangularium cõponentium tetrahedrum centralem quincuplum est, quippe quæ sequuntur numerum basium. Et similiter aggregatum triangulorum ad aggregatum triangulorum quincuplum, vt qui sequuntur numerum laterum. Addatur igitur vnitati centrali ipsius icosahedri quaternarius: & sic quinarius erit quincuplus ad vnitatem centralem pyramidis, seu tetrahedri centralis. Cumque semidiametri icosahedri sint 12. & semidiametri tetrahedri sint 4. iuxta numerum scilicet angulorum solidorum: atque semidiametri 12. sint totidem radices collaterales; oportebit 12. radicibus addere 8. radices collaterales, & perinde quadruplum paris numeri collateralis (quando scilicet, radix duplicata conficit parem) vt aggregatum semidiametrorum in icosahedro existat quincuplum aggregati semidiametrorum tetrahedri: Sed quadruplum paris numeri collateralis: quoniam scilicet par cum vnitate facit imparem collateralem. Igitur quadruplum imparis collateralis appositus icosahedro, facit omnia, quæ concurrunt ad structuram ipsius icosahedri quincupla eorum, quæ componunt tetrahedrum, singula singulorum, & perinde totum numerum totius quincuplum: quod est propositum.

REPASTINATIO QVORVNDAM LOCORVM.

Propositio 1ª.

QVOD fit ex quouis numero in quotlibet numeros, æquale est ei, quod fit ex illo in aggregatum ex his. Ostenditur in decima sexta, noni Elementorum, quo ad numeros: & in prima secundi quo ad lineas.

Propositio 2ª.

Si aliquis numerus duos singulos multiplicet: producta erunt multiplicatis proportionalia. Ostenditur in 18ª septime quo ad numeros, & in pª sexti, quo ad lineas.

Propositio 3ª.

Si numeros duos vnitate distantes aliquis multiplicet: multiplicans erit differentia productorum. Vt si ipsos b c. quorum c. vnitate maior, multiplicet ipse d. numerus & faciat, ipsos g h. hoc est, d. multiplicans b. facit g. at d. multiplicans c. faciat h. tunc dico, quòd h. excedit ipsum g. in ipso d. Patet, quoniam ex diffe. multiplicationis g. continet ipsum d. totiens, quot vnitates sunt in b. atque h. ipsum d. toties, quot vnitates sunt in c. igitur h. continebit ipsum d. semel pluries, quàm g. continet eundem. hoc est, h. excedet ipsum g. in ipso d. Quod est propositum.

b		c
2	d	3
	4	
g		h
8		12

Propositio 4ª.

Existentibus quatuor numeris proportionalibus: quod fit ex primo in vltimum, æquale erit ei, quod fit ex reliquis. Ostenditur in 20ª septimi, quo ad numeros: & in 15ª sexti quo ad lineas.

Propositio 5ª.

His prælibatis, ponatur vnitas a. quilibet autem numerus b. ipse autem c. vnitate maior quàm b. Deinde b. in se faciat d. b. in c. faciat e. & c. in se faciat f. Post hæc b. in d. faciat g. Item b. in e. faciat h. Adhuc b. in f. faciat k. Demum c. in f. faciat l. tandem b. in g. faciat m. Item b. in h. faciat n. Necnon b. in k. faciat o. Sic b. in l. faciat p. Denique c. in l. faciat q. Quibus dispositis.

PROPOSITIO 6ª.

a
1
b c
2 3
d e f
4 6 9
g h k l
8 12 18 27
m n o p q
16 24 36 54 81

Ipse d. erit quadratus ipsius b. Et ipse f. quadratis ipsius c. Item e. parte altera longior, siue supplementum in quadrato ipsius b c. Adhuc ipse g. erit cubus ipsius b. ipse autem l. cubus ipsius c. Ipsi quoque h k. medij proportionales, supplementa in cubo ipsius b c. Denique ipse m. quadratus secundus ipsius b. hoc est quadratus ipsius d. Ipse autem q. quadratus secundus ipsius c. hoc est quadratus ipsius f. Ipsique n o p. medij proportionales ad integrandum, vt patebit, quadratum secundum ipsius b c. hoc est, quadratũ eius quadrati, quem constituunt quadrati d f. cum duplo ipsius e. Hæc omnia constant ex diffinitionibus ipsorum quadratorum, cuborum, & supplementorum, sed quadrata primum & secundum, & cubus ipsius b c. demonstrabuntur.

PROPOSITIO 7ª.

Post vnitatem duo numeri b c. sunt termini proportionis superparticularis. Tamq́ue tres numeri d e f. sequentis ordinis, quàm quatuor g h k l. penultimi: quamq́; quinque m n o p q. postremi, sunt continue proportionales in dicta dudum proportione. Quoniam scilicet b. multiplicans singulos b c. facit singulos d e. Ideo per secundam præmissarũ, erit sicut b. ad c. sic d. ad e. Item quoniam c. multiplicans singulos b c. facit singulos e f. ideo p eãdẽ, sicut b. ad c. sic e. ad f. Quare d e f. sunt cõtinue proportionales in proportione ipsorum b c. Similiter & per eandem, ostendemus, quòd tam g h k l. quàm ipsi m n o p q. sunt in eadem proportione ipsorum b c. continue proportionales. Quod est propositum.

PROPOSITIO 8ª.

Item sicut ipsi a b d g m. sunt continuè proportionales: ita & ipsi c e h n. nec non ipsi f k o. Atque ipsi l p. sunt in eadem proportione continua proportionales. Adhuc, sicut ipsi a c f l q. sunt continue proportionales; ita tam ipsi b e k p. quàm ipsi d h o. quamq́; g n. sunt in eadem continua proportione proportionales. Hæc omnia patent per præcedentem, & per permutatam proportionalitatem.

PROPOSITIO 9ª.

Itẽ a e o. sunt in proportione continua sicut b h. & cæteri ad æquidistantiam descendentes. Similiter m h f. sunt in proportione continua, sic g e. & cæteri condescendentes. Demum ipsi q k d. sunt in proportione continua, in qua

fb.

fb. cæteriq́ue correlatiui. Constat ex compositione æqualium proportionum, ex quibus patet conditio & proprietas huiusce descriptionis numerorũ, non tã ad necessitatẽ demõstrationum, q̃ ad pleniorem suppositionis intelligentiam.

PROPOSITIO 10ª.

Sicut vnitas est differentia duorum sequentium b c. numerorum; ita ipsi duo b c. sunt differentiæ trium sequentium d e f. Et hi tres differentiæ quatuor sequentium g h k l. Atque hi demum quatuor differentiæ quinque m n o p q. postremum per ordinem sumptæ. Patet hoc totum per tertiam præmissarum, quoties opus est, adductam.

PROPOSITIO 11ª.

a
1
b c
2 3
d e f
4 6 9
g h k l
8 12 18 27
m n o p q
16 24 36 54 81

Omnis impar præcedenti quadrato appositus, costituit sequentem quadratum. Patet: nã in proposita descriptione, ipsorũ b c. semper vnus est impar, & reliquus par sibi collateralis. Quare totus b c. impar erit. Sed per præcedentem, b c sunt differentiæ ipsorum d e f. igitur b c. impar adiectus ipsi d. quadrato, cõficit ipsum f. quadratũ sequentẽ: qđ est ꝑpositũ.

PROPOSITIO 12ª.

Numeri quadrati d f. ex ipsis b c. siue vnitate, siue quocunq; numero differentibus, vnà cum duplo ipsius e. medij proportionalis, conflant quadratum ex toto b c. factũ. Hæc in 16ª. noni per numeros, & in 4ª secundi Elementorum per lineas demonstratur. Demonstrabitur & hìc hoc modo. Ipse b. in b c. singulos, per 5ª præmissarum, facit ipsos d e. singulos. Item ipse c. in b c. singulos facit ipsos e f. singulos: Igitur, per primam præmissarum, totus b c. in totum b c. faciet aggregatum ex d e e f. hoc est, quadratum, quod ex b c. æquabit congeriem ipsorũ d f. dupliq́ue ipsius e. Quod fuit demõstrãdũ.

b { b — d, c — e }
c { b — e, c — f }
Igitur
b c — b c { d, ce, ef }

PROPOSITIO 13ª.

Duo quadrati proximi cum media parte altera lõgiore coniuncti, conficiunt numerum hexagonum æquiangulum. Hæc est 31ª primi horum Arithmeticorum.

COROLLARIVM.

Hinc seqtur pulcherrimũ corollariũ, videlicet, Hexagonũ æqangulũ cũ parte altera longiore collaterali cõiunctũ, consumat quadratum imparis collateralis: Nã per antepræmissam, totũ d e f. (qđ per præmissam est hexagonũ æquiangulũ) cum ipso e. (qui est parte altera longior) conflat quadratum totius b c. imparis collateralis. Quod sequitur supponendo, ipsorum b c. differentiam esse vnitatem.

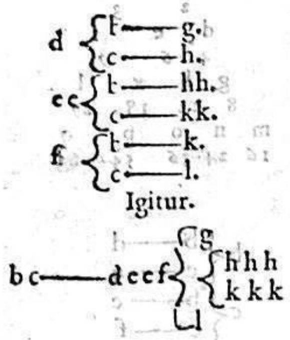
PROPO-

PROPOSITIO 14ª.

Hexagonus æquiangulus cum præcedenti cubo iunctus, conficit cubum sibi collateralem. Hoc est, aggregatum ex ipsis d e f. quod, per præcedentem, est hexagonus æquiangulus, coniunctus cũ g. Cubo cõflat ipsum l. cubũ: quod ostensum fuit in 52ª primi horum Arithmeticorum. Ostēdetur & hìc, hoc modo. Per 10ª præcedentem, ipsi d e f. numeri sunt tres differentię ipsorũ g h k l. fit ergo, vt totum d e f. coniunctũ cũ ipso g. cubo conficiat ipsum l. cubũ: qđ fuit demonstrādũ.

PROPOSITIO 15ª.

Duo cubi partium cum triplis mediorum proportionalium coniuncti conficiunt cubum totius. Hoc est, ipsorum b c. siue vnitate, siue quocunq; numero differentiũ cubi, qui sunt ipsi g l. cũ triplis ipsorũ g k. mediorũ proportionaliũ coniuncti, perficiũt cubũ totius b c. quod in 21ª secundi horũ arithmeticorũ fuit ostensum: hìc tñ facilius ostēdetur, sic: Per quintā præmissarũ, ipse d. in singulos b c. facit singulos g h. Item duplum ipsius e. in singulos b c. facit h h. atque k k. hoc est, duplum ipsorum h k. Adhuc f. in singulos b c. facit ipsos k l. singulos Igitur, per primā præmissarum, ipse b c. ductus in aggegatũ ex d f. duploq; ipsius e. (qđ per 12ª præmissarũ, est quadratũ ipsius b c.) Hoc est b c. radix ducta in suũ quadratũ, producet aggregatũ ex ipsis g l. triploq; ipsius h. & triplo ipsius k. radix aũt in quadratum producit suum cubũ. Ergo tale aggregatum ex g l. triploque ipsorum h k. est cubus ipsius b c. numeri. Quod fuit demonstrandum.



PROPOSITIO 16ª.

Duplum ipsius e. cum vnitate, cõficit aggregatũ ipsorum d f. hoc est, duplum numeri parte altera longioris, cum vnitate conflat aggregatum collateralis & precedentis quadratorum. Patet, quoniam si differentiæ ipsorum d e. & ipsorum e f. essent æquales, tunc duplus ipsius e. esset æqualis aggregato ipsorum d f. Sed cùm differentia ipsorum d f. sit vnitate maior, quàm differentia ipsorum d e. illa, scilicet c. & hæc b. per 3ª huius, idcirco fit vt aggregatum ipsorum d f. vnitate superet duplum ipsius e. sicut proponitur.

PROPOSITIO 17ª.

Aggregatum ipsorum b c. est excessus, quo aggregatum ipsorum g l. maius est aggregato ipsorum h k. Patet sic. Si differentia ipsorum g h. esset æqualis differentiæ ipsorum k l. Tunc aggregatum ipsorũ g l. esset æquale aggregato ipsorũ h k. Sed quoniam

quoniam differentia ipsorum k l. hoc est f. superat differētiā ipsorũ g h hoc est, ipsum d in aggregato ipsorum b c. quod per 10ª præmissarum, est id, quo f. superat ipsum d: idcirco aggregatum ipsorum g l. maius est aggregato ipsorum h k. in aggregato ipsorum b c. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO 18ª.

Ex aggregato ipsorum b c. in ipsum e. producitur aggregatum ipsorũ h k. Patet: nam per 5ª præmissarum, b. in e. facit h. Itēque b. in f. facit k. Sed per 7ª sicut b. ad c. sic e. ad f. Igitur per 4ª ipse c. in e. faciet k. Quare per primam, totum b c. in e. facit totum h k. Quod est propositum.

PROPOSITIO 19ª.

Ex aggregato ipsorum b c. in aggregatum ipsorum a e. producitur aggregatum ipsorum g l. Nam cùm, per præcedentem, ex aggregato ipsorum b c. in ipsum e. fiat aggregatum ipsorum h k. Iam ex b c. in a e. (qui ipsum e. vnitate excedit) producetur aggregatum ex h k. & b c. Sed tale aggregatum, per ante præmissam, est æquale aggregato ipsorum g l. Igitur & ex b c. in a e. producetur totum g l. Quod est propositum.

PROPOSITIO 20ª.

Ex aggregato ipsorum b c. in aggregatum ipsorũ, ipsorum d f. producitur aggregatum ipsorum g h k l. Nam cum per ante præmissam ex b c. in e. fiat h k. & per præcedentem, ex b c. in a e. fiat g l. iam, per primam præmissarum, ex b c. in aggregatum ex duplo ipsius e. & ex a. producetur totum g h k l. Sed per 16. duplum ipsius e. cum a. vnitate, conflat aggregatum ipsorum d f. igitur ex b c. in d f. producetur totum g h k l. Quod fuit ostendendum.

PROPOSITIO 21ª.

Ex aggregato radicum vnitate distantiũ, in aggregatum quadratorum ipsarum radicum, producitur differentia secundorum quadratorum. Hæc est, 89ª primi horum arithmeticorum: tamen hìc breuius demonstratur. Nam cùm b c. sint radices vnitate distantes, quæ semper faciunt imparē collateralem ipsius f. quadrati, quem proxime præcedit d. quadratus constat ꝙ hic id ipsum proponitur demonstrādũ, ꝙ in dicta 89ª. Itaq; cũ per 10ª præmissarũ aggregatũ ipsorum g h k l. sit differentia ipsorum m q. qui sunt secundi quadrati dictarum radicum, hoc est, quadrati ipsorum d f. quadratorum: atque per præcedentem ex toto b c. in totum d f. producatur

ducatur totum g h k l.

SCHOLIVM.

Talis autem secandorum Quadratorum differentia dicitur Gnomo secundorum quadratorum: & idem est Octahedrus centralis, Idem cubus centralis: Idē quoq; Pyramis triāgula centralis locorum impariū, vt satis ostēsum est in primo horum arithmeticorū.

PROPOSITIO 22a.

Aggregatum ex m q. ex quadruplo ipsorum n p. & ex ipsius o. sexcuplo, est secundus quadratus totius b c. Hæc est conclusio dictarū ꝓpositionū, in qua possum⁹ nobis laudē totā vēdicare, ꝙ necubi hacten⁹ neq; apud Græcos, neq; apud Latinos sit demōstrata. Itaq; qđ de ipsius b c. quadrato fuit ostēsum in 12a. de cubo aūt eiusdē in 15a præmissarū idipsum de secūdo eiusdē b c. quadrato demonstret hæc 22a in qua toti⁹ huius repastinationis gloria consistit. Siue igitur ipsorū b c dr̄a sit vnitas, siue alius quicunq; numerus, hæc demōstratio locū habet. Itaq; adductis pa 4a & 5a. præmissarū, liquet ꝙ ex b c. toto in ipsum g. fit totū m n. Itē ꝙ ex b c. toto in h. fit totū n o. Itē ex b c. toto in k. fit totū o p. Itē ex b c. toto in l. fit totū p q: Hinc sequitur, vt, ꝙ iā dictū est, ex b c. toto in g. fiat m n. & ex b c. in triplū ipsius h. fiat triplū ipsorū n o. & ex b c. in triplū ipsius k. fiat triplū ipsorū o p. & ex b c. in l. fiat totū p q. Igitur per pa præmissarū ex ipso b c. in aggregatum ex g l. triploq; ipsorū h k. quòd aggregatum per 15a præmissarū est cub⁹ ipsius b c. producet aggregatū ex m q. quadruplo ipsorū n p. atq; sexcuplo ipsius o. Sed ex b c. in suū cubū producit secund⁹ quadratus ipsius b c. Ergo talis 2⁹ quadratus ipsi⁹ b c. erit cōgeries ex m q. ex quadruplo ipsorū n p. atq; sexcuplo ipsius o. sicut demonstrandum fuit.

b c { g ——— mn
{ hhh — nnn.ooo.
{ kkk — ooo.ppp.
l. ——— p q.
Cubus ——— □⁹ 2⁹.

5 { 8 ——— 40
{ 36 ——— 180
{ 54 ——— 270
27 ——— 135

1
1 . 2
1 . 2 . 4
1 . 2 . 4 . 8
1 . 4 . 8 . 16.

a
1
b c
2 3
d e f
4 6 9
g h K l
8 12 18 27
m n o p q
16 24 36 54 81
r
216
s
1296

1
3 . 4
9. 12. 16
27. 36. 48. 64
81. 108. 144. 192. 256

1
4 . 5
16. 20. 25
64. 80. 100. 125
256. 320. 400. 500. 625

1
5 . 6
25. 30. 36
125. 150. 180. 216
625. 750. 900. 1080. 1296.

Et sic deinceps in infinitū.

PROPOSITIO 23a.

Adhuc dico quòd o. est quadratum ipsius e. Patet: nam per nonam a e o. sunt continue proportionales. Cumque a. sit vnitas, erit per octauam noni Elementorum, o. quadratus & per diffin. eius radix e. quod est propositum. Vel sic: quoniam per septimam ipsi d e f. sunt continue proportionales: & per octauam, ipsi b e k. sunt continue proportionale. iam per vigesimam septimi b. in k. faciet quadratum ipsius e. sicut d. in f. Sed per quintam harum b. in k. facit o. igitur o. est quadratum ipsius e. Quod est propositum.

PROPOSITIO 24a.

Item dico, quòd tam g. in l. quàm h. in k. producit cubum ipsius e. Patet sic: ex e. in o. fiat r. eritque r. cubus ipsius e. per diffin. Quoniam per præmissam o. est □. ipsius e. Sed, per octauam harum, sicut e. ad h. sic k. ad o. atque per 20a septimi, quod fit ex e in o. idem ex h. in k. igitur ex h. in k. fiet r. Cumque per eandem, quod ex h. in k. idem fiat ex g. in l. quoniam scilicet per septimam harum g. ad h. sicut k. ad l. Iam & ex g. in l. fiet idem r. cubus ipsius e. sicut proponitur demonstrandum.

PROPOSITIO 25a.

Item dico, quòd ex secundo quadrato in secundum quadratum producitur, secundus. Per sextam præmissarum m q. sunt secundi quadrati ipsorum b c. Ostendendum est igitur, quod ex m. in q. producitur secundus quadratus, sic per septimam harum & æquam proportionalitatem, ipsi m o q. sunt continue proportionales: quare per 20a septimi, quod fit ex m. in q. est id, quod fit ex o. in se. Sed, per antepræmissam, o. quadratus est: ergo quod fit ex o. in se, est secundus quadratus; quare quadratus secundus est, qui fit ex m. in q. & hoc erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Manifestum est igitur, quòd sicut ex ductu ipsarum b c.

 radicum

℞.	2	3	6
□.	4	9	36
cub.	8	27	216
2° □°	16	81	1296

radicum propositarum siue vnitate siue quo vis numero distantium producitur e. ita ex ductu ipsorum d f. quadratorum fit ipse o. quadratus ipsius c. atque ex ductu g l. cuborum, fit ipse r. cubus ipsius e. Et similiter ex ductu m q. duorum quadratorum, fit secundus quadratus ipsius e. qui videlicet fit ex o. in se, qui sit s. Quod etiam constitit per corollarium vndecimæ secundi horum Arithmeticorum. Cætera relinquimus curiosioribus.

LIBRI PRIMI ARITHMETICORVM MAVROLYCI FINIS.

Completus Messanę in freto Siculo in ædibus ipsius Authoris iuxta Cœnobium Carmelitanorum, ad horam noctis secundam diei Dominici, qui fuit Aprilis decimus octauus, & sanctissimum Pascha festum.

Anno salutis.

M. D. LVII.

MAVROLICI ABBATIS MESSANENSIS MATHEMATICI

Arithmeticorum Liber Secundus.

PROLOGOMENA.

QVONIAM Arithmetica instrumentum est omnis supputationis, & numeri sunt termini, quibus quælibet magnitudo significatur; non dubium est, quin per numeros fieri possit omnis magnitudinis calculus. Cùm verò Geometria comprehendat omnium quantitatum species, videlicet lineas, superficies, solida & cętera continua, quę ad hæc redigi possunt; vt tempora, & pondera; duplicem vtique praxim habebit; vnam, quæ fit lineando, alteram, quæ supputando: quarum hæc ab illa tanquam à fonte deriuatur: & illa theorię innititur. Sicut enim tam theoremata, quàm problèmata per theoriā demonstrantur, & soluuntur; ita mox siue per lineationem siue per calculum ad praxim rediguntur. Nam intellectu præmeditata lineamus: & lineata calculamus. Et quamuis lineator descriptionem oculo repræsentet, & mentali speculatione punctum geometricum consequatur; tamen calculator numeris etiam idipsum consequitur, sed & paucis characteribus minutiores partes distinguit:

quod lineator non nisi in spacio immenso, vel magno instrumento (quod nulli facile est) præstare potest. Quæ distinctio quidem necessaria est, cùm per numeros, irrationalis, aut ignotæ magnitudinis terminum seu limitem magis ac magis propinquantes vestigamus. Sicuti cum, exempli gratia, proposita circuli diametro, latus trianguli æquilateri, aut quadrati in eo descripti, metiri per easdem partes in quibus diameter supponitur, aut cum planetæ cuiuspiam diurnum motum metiri iubemur. Itaque licèt de theoria numerorum & magnitudinum plerique graues Authores affatim scribant, & numerariam praxim quàm plurimi ludorum magistri passim doceant & literis mandent; nemo tamen hactenus regulas ipsas practicas elementorum, additionis, subtractionis, multiplicationis, diuisionis, radicum extractionis, progressionum, positionum & dimensionum satis demonstrauit. Haud enim cuiuis peruium est, ante oculos ponere quemadmodum praxis quælibet talis à theoria deducatur, & nonnulli idipsum ausi, rem obscuriorem fecere, sicut is, qui algorismum demonstratum edidit. Nos itaque, quatenus sese vires nostræ extendunt, aut quantum calamo dictabit ingenium, tentabimus aliquid super hoc negocio proferre, dum otium præstatur. Itaque, vt ratio poscit, diffinitionibus præmissis, rem aggrediemur, seriatim singula demonstrantes.

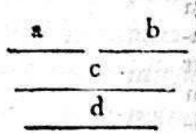
Diffinitiones

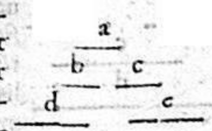
DIFFINITIONES.

Posita ergo quantitas est, quę ad libitum ponitur ad communem eiusdem generis quantitatum mensurã: & quæ ab vnitate denominatur. Sicut vnitas est communis numerorum dimensio. Quando igitur multiplex est ad positam, significabitur eo numero, secundùm quem ipsa multiplex est ipsius positæ. Quando verò quantitas cõtinet partem vel partes positæ, significabitur duobus numeris, scilicet denominatore & numeratore partis vel partium. Vnde quantitas significata ad positam habet eam rationem, quam numerus denominator, ad numeratorem. Quare, si tales numeri fuerunt æquales, quantitas significata erit tũc æqualis positæ: minor aũt, cùm maior fuerit denominator: maior verò, cùm minor. Erit vtique significata quantitas ad positam, aut æqualis, aut multiplex, aut superparticularis, aut superpartiens, aut multiplex super particularis, aut denique multiplex superpartiens, quando maior fuerit significata, quàm posita. Quòd si posita sit maior: tunc talis erit posita ad significatam. Duæ quoque quantitates, quarum denominatores eandem proportionem habebunt ad numeratores, erunt ad inuicem ęquales: quoniam scilicet eandem rationem habent ad positam. Cuius verò denominator maiorem rationem habebit ad numeratorem, maior erit. Quantitas cum quantitate coniungi dicitur, cùm sumitur earum aggregatum. Quantitas à quantitate subtrahi dicitur, cùm sumitur maioris super minorem excessus. Quantitas quantitatem multiplicare dicitur, cùm sumitur quantitas, quæ ad multiplicatam eam habet rationem, quam multiplicans ad positam: Et sumpta sic quantitas, productum vocatur. Vnde, quando multiplicans maior fuerit quàm posita, & productum maius erit multiplicante: & quando minor, minus: & quando æqualis, ęquale. Quantitas in quantitatem partiri dicitur, cum sumitur quantitas, ad quam diuisa eam habet rationem, quam diuidens ad positam. Et sumpta sic quantitas vocatur proueniens, siue quotiens. Vnde si diuidens maior fuerit, quàm posita, & diuisa maior erit quotiente: & si minor, minor; & si æqualis, æqualis. Quadratum alicuius quantitatis est productum eius in se ipsam multiplicatæ: & ipsa tunc radix vocatur. Cubus autem est is, qui fit ex multiplicatione radicis in quadratum. Et quadratus secundus, qui fit ex quadrato primo in se ipsum, siue ex radice in cubum. Quo fit, vt posita quantitas, radix, quadratum, cubus, & quadratum secundum, sint continue proportionalia: semperque crescentia, si radix sit maior, quàm posita. Decrescentia verò, si minor. Quantitas magnitudine rationalis est, quę positæ commensurabilis est. Quantitas potentia tantùm rationalis est, cuius quadratum duntaxat positæ commensurabile est. Quantitas cubo tantùm rationalis est, cuius cubus solùm positæ commensurabilis est. de qua nihil Euclides. Quantitas quadrato secundo tantùm rationalis est, cuius quadratum secundum duntaxat positæ commensurabile est: quæ medicalis quantitas vocatur. Binomium est bimembris quantitas ex duabus quantitatibus potentia tantùm inuicem commensurabilibus composita. Excessus autem maioris membri supra minus, Apotome, siue recisum, vel residuum vocabitur.

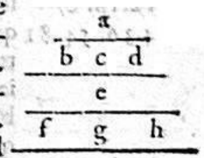
PROPOSITIO 1ª.

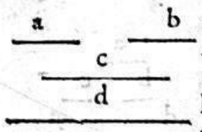
Quidquid de Numerorum, Linearum, et Solidorum ductu ratione, proportione & Symmetria, atque similitudine ratiocinamur, idem de quolibet quantitatis genere demonstrare atque concludere possumus. Hoc enim fiet assumptis ad demonstrandum diffinitionibus, ac suppositis nostris. Exempli gratia, si duorum numerorum vterque multiplicet reliquum, producti sunt æquales, quæ est 17ª septimi Elementorũ. Igitur etsi duarum quantitatum vtraque multiplicet alteram, producta erunt æqualia. Quod sic ostendam. Quãtitas a. multiplicans quantitatem b. producat quantitatem c. Item quantitas b. multiplicans quantitatem a. faciat quãtitatem d. Aio, quòd quantitates c d. sunt inuicem æquales. Cùm enim ex diffinitione multiplicationis c. producta ad b. multiplicatam sit sicut a. multiplicans ad positam, erit & permutatim c. ad a. sicut b. ad positam. Sed rursus ex diffinition. multiplicationis, sicut b. multiplicans ad positam, sic d. producta ad a. multiplicatam. Igitur sicut d. ad a. sic c. ad a. & perinde, per nonam quinti, c d. quãtitates sunt æquales: quod fuit demonstrandum. Exemplum aliud à sequenti propositione sumptum. Si numerus duos multiplicans duos produxerit, producti sunt multiplicatis proportionales. Igitur & si quantitas duas quantitates multiplicãs, duo ꝓducta fecerit, producta multiplicatis





erunt proportionalia: quod sic ostendam. Quantitas a. multiplicans ipsam b. producat d. multiplicans autem c. faciat e. Aio, quòd sicut est b. ad c. sic est d. ad e. cùm enim per diffinitionem multiplicationis d. producta ad b. multiplicatam, sit sicut a. multiplicans ad positam, nec non e. producta ad c. multiplicatam, sit etiam sicut a. multiplicans ad positam; Iam erit sicut e. ad c. sic d. ad b. Ergo & permutatim erit sicut e. ad d. sic c. ad b. & conuersim sicut d. ad e. sic b. ad c. quod est propositum. Similiter quicquid in septimo, octauo & nono de numeris ostendit Euclides, idem de quantitatibus in genere ostendere possumus. Alicubi tamen pro numeris quantitates rationales substituendo, assumptis diffinitionibus ac suppositis nostris. Quidquid etiam in secundo, sexto & vndecimo Elementorum de ductu & proportione linearum, arearum & solidorum traditur, potest ad quantitates in genere sumptas conuerti. Exempli gratia: prima secundi sic conuertetur: si fuerint duæ quantitates, quarum altera in quotlibet segmenta secetur; illud, quod ex ductu alterius in alteram fiet, æquum erit his, quæ ex ductu quantitatis indiuisæ in vnumquodq; segmentorum diuisæ pariter acceptis producentur. Quod sic ostendam: sint duæ quantitates à indiuisa & b c d. secta in partes quotuis, vt puta tres b c d. & ex a. in totã b c d. proueniat e. nec non ex a. in singulas partes b c d. proueniant singulę f g h. quantitates. Dico tunc, quòd e. æqualis est ipsis f g h. simul sumptis. Nam ex diffin. multiplicationis erit e. ad b c d. sicut a. ad positam. Et similiter sicut a. ad positam, sic f. ad b. sic g. ad c. sic h. ad d. Igitur per vndecimam quinti, & coniunctam proportionem, totum f g h. ad totum b c d. sicut a. ad positam: fuit autem sicut a. ad positam, sic e. ad b c d. ergo sicut e. ad b c d. sic f g h. ad b c d. Quare per nonam quinti f g h. totum æquale est ipsi e. quod erat demonstrandum. Ex qua demonstrabantur reliquæ propositiones secundi successiue, de quantitatibus in genere, quemadmodum Campanus easdem de numeris demonstrauit in decima sexta noni. Quidquid denique decimus Elementorum de linearum & arearum symmetria & ductu aut proportione ratiocinatur, potest totũ ad quodlibet genus quantitatis conuerti. Exempli gratia, illa propositio, A rationalibus longitudine cõmensurabilibꝰ rectis lineis factũ rectangulum rationale est, ad quantitates in genere sic conuertetur





uertetur quantitatum rationaliũ productũ rationale est. qđ sic ostenditur. Quantitas rationalis a. multiplicans quantitatẽ rationalem b. facit c. Dico tunc, quòd c. quantitas rationalis est. namq; ex a. in se fiat d. & tunc per primã secundi Elementorum, ad quantitates redactã erit, sicut a. ad b. sic d. ad c. sed a. ipsi b. commensurabilis est per hypothesim: ergo & d. ipsi c. commensurabilis est, per 10ª decimi. Cumq; d. rationalis sit (quia quadratum est ipsius a.) iam per diffin. & c. rationalis erit. Quod est propositũ. Similiter procedere poterimus, reliquas decimi Element. propositiones demonstrando. Et quod nona eiusdem libri de quadratis ostendit, pôt etiam ad cubos & ad secunda quadrata quantitatum referri. sic; A commensurabilibus inuicem quantitatibus producta quadrata, sunt ad inuicem sicut quadrati numeri: & producti cubi, sicut cubi numeri: & producta secunda quadrata, sicut secundi numeri quadrati. Contrà, & quantitates, tam, quarũ quadrata sunt ad inuicem, sicut numeri quadrati, quàm, quarum cubi sunt ad inuicem, sicut numeri Cubi: quàm q; quarum secunda quadrata sunt ad inuicem, sicut secundi quadrati; sunt & adinuicem omnino commensurabiles. Quod haud difficilius ostenditur, quàm nona ipsa quoad quadrata. Hoc, scilicet supposito & antè demonstrato, quòd sicut inter duos quadratos numeros semper interiacet vnus numerus medius proportionalis: ita inter cubos interiacent duo medij proportionales: & inter secundos quadratos tres medij proportionales. Ab incommensurabilibus verò inuicem quantitatibus facta quadrata non sunt ad inuicem, sicut quadrati numeri; neq; cubi, sicut cubi numeri: nec secunda quadrata sicut secundi quadrati numeri. Contrà, & quantitates, tam quarum quadrata non sunt ad inuicem, sicut quadrati numeri, quàm quarum cubi nõ sunt inuicem, sicut cubi numeri, quàmque quarum secunda quadrata non sunt inuicem, sicut secũdi quadrati numeri; sunt intus se incõmensurabiles. quæ duæ proportiones sequuntur ex præmissis à destructione contrariorum. Quo fit, vt quot linearum irrationalium species tractantur in decimo Elementorũ, totidẽ eiusdẽ nominis, & earundẽ proprietatũ speciei inueniãtur inter quantitates in genere sumptas. Ita, inquã, vt in omni quantitate vnius generis existant oẽs tales rationalium species. Per hanc igitur propositionem omnis geometrica speculatio redigitur ad numerariam praxim.

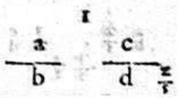
1
2 . 3
4 . 6 . 9
8 . 12 . 18 . 27
16 . 24 . 36 . 54 . 81

PROPO-

PROPOSITIO 2ª.

Omnis quantitatum additio, subtractio, multiplicatio, seu diuisio, vel radicum extractio, fit per eos numeros, à quibus ipsæ quantitates significantur. Hoc est, numerorum, per quos duę vel quotlibet quantitates singulos singulæ significantur, aggregatum est numerus significans talium quantitatum aggregatum. Et numerorum, per quos duæ quantitates inæquales significantur excessus, est numerus significãs ipsarũ quantitatũ excessum. Item numerorum, per quos duę quantitates significantur, productus, est numerus, significans earũ quantitatũ productum. Adhuc diuiso numero in numerũ, prouenit seu elicitur numerus significans quantitatem prouenientem ex diuisione quantitatis illius nũi in quantitatẽ hui⁹. Demũ oĩs radix quadrati, vel cubi numeri est numerus significans quantitatẽ, quæ radix est quantitatis quadratæ vel cubicæ per ipsum quadratũ vel cubũ significatæ.

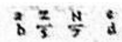
PROPOSITIO 3ª.



Quantitates, quarum denominatores sunt æquales, sunt adinuicem, sicut numeratores. Sint duæ quantitates a b. c d. quarum denominatores b d. ponantur æquales: numeratores autem sint a c. Aio, quòd quantitas a b. ad quantitatem c d. est, sicut a. ad c. Nam ratio quantitatis a b. ad quantitatem c d. componitur ex ratione ipsius a b. ad positam, & ex ratione positæ ad ipsam c d. Numeri aũt a. ad numerũ c. ratio componitur ex ratione numeri a. ad numerum b. & ex ratione numeri b. vel d. (sunt enim æquales per hypotesim) ad numerum c. Sed per diffi. terminorũ, quantitas a b. ad positam, est sicut numerus a. ad numerũ b. quantitas aũt posita ad quãtitatẽ c d. sicut numerus d. ad numerũ c. Igitur per æquã proportionẽ erit quantitas a b. ad quantitatẽ c d. sicut numerus a. ad numerũ c. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO 4ª.

Quantitates, quarum numeratores sunt æquales, sunt ad inuicem sicut denominatores, ordine commutato. Sunto, sicut in præmissa, quantitates a b. c d. in quibus ponantur æquales ipsi numeratores a c. Aio tunc, q quantitas a b. ad quãtitatẽ c d. est sicut numerus d. ad numerũ b. Fiat enim ex a. in d. numerus e. & ex b. in c. fiat f. ex b. verò in d. proueniat g. eritque, per primã sexti, sicut a. ad b. sic e. ad g. vt in prima propositione hui⁹ ostẽdim⁹: quare, sicut in diffinitionibus patuit, quãtitas e g. ęqualis erit ipsi a b. Item erit similiter,



per

liter, ſicut c. ad d. ſic f. ad g. & ideo quantitas f g. æqualis erit ſimiliter quantitati c d. Et qm̃ quantitatum e g. f g. idem eſt denominator, ideo per pręcedẽtẽ, e g. ad ipſum f g. erit ſicut numerus e. ad numerũ f. Sed e. ad f. ſicut d. ad b. qm̃ c. ipſi a. æqualis multiplicans ipſos b d. facit ipſos f e. Igitur ſicut d. ad b. ſic erit quantitas e g. ad quantitatem f g. hoc eſt, quantitas a b. ad quantitatem c. d. Quod fuit demonſtandum.

PROPOSITIO 5ª.

Quantitatum duarum ratio componitur ex rationibus numeratorum & denominatorum ordine commutato ſumptis. Sunto binæ quantitates a b. c d. quarum numeratores, a c. denominatores autem b d. numeri. Aio, ꝙ ratio quantitatis a b. ad quantitatem c d. componitur ex rationibus duabus, ſcilicet ex ratione numeri a. ad numerũ c. & ex rõne numeri d. ad numerũ b. Ponatur enim his media quantitas e f. cuius numerator e. ſit æqualis numero c. & denominator f. æqualis numero b. eritque, per antepræmiſſam, quantitas a b. ad quantitatem e f. ſicut numerus a. ad numerũ e. hoc eſt, ſicut a. ad c. Et per præcedentem, quantitas e f. ad quantitatẽ c d. ſicut numerus d. ad numerũ f. hoc eſt, ſicut d. ad b. Sed poſita media quantitate e f. ratio quãtitatis a b. ad quãtitatẽ c d. cõponitur ex ratione quantitatis a b. ad quantitatẽ e f. & ex ratione quantitatis e f. ad quãtitatẽ c d. Igitur ex æquali; eadem ratio quantitatis a b. ad quantitatem c d. componetur ex ratione numeri a. ad numerum c. & ex ratione numeri d. ad numerum b. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO 6ª.

Duas propoſitas quantitates coniungere. Si propoſitæ quantitates ſingulis ſignificentur numeris. Tunc cõiungãtur numeri, per quos propoſitæ quantitates ſignificãtur: Nã aggregatũ tale erit numer⁹ ſignificãs aggregatũ ꝓpoſitarũ quãtitatũ quæſitũ per ſecũdã huius. Si autẽ propoſitę quãtitates ſingulæ binis ſignificẽtur numeris. ſint ipſæ tũc a b. c d. quarũ numeratores qdẽ a c. denominatores aũt (vt aſſolet) b d. Ducatur b. in c. & fiat e. Ducatur etiam a. in d. & fiat f. Sitque ipſorũ e f. aggregatũ g. deinde ex b. in d. fiat h. eritq; quãtitas g h. cui⁹ numerator g. denominator aũt h. aggregatũ ipſarũ a b. c d. quantitatũ quæſitũ. Cũ eñ b. multiplicãs ſingulos c d. faciat ſingulos e h; erit per primam huius, ſicut c. ad d. ſic e. ad h. Et ſimiliter, qm̃ d. multiplicãs ſingulos a b. facit ſingulos f h. eritque & ſicut a. ad b. ſic f. ad h. Quare,

a 12 10 f

per

per diffinita, quantitas e h. erit æqualis quantitati c d. & quãtitas f h. æqualis quantitati a b. Sed per diffinitionem, ſicut numerus e. ad numerũ h. ſic quantitas e h. ad poſitã: ac ſicut numerus f. ad numerũ h. ſic quantitas f h. ad poſitam. Igitur per 24ª quinti Elemen. ſicut g. aggregatum ipſorũ e f. ad numerũ h. ſic aggregatũ ex ipſis e h f h. quantitatibus, hoc eſt ex ipſis c d. a b. quantitatibus ad poſitam. Quare, per diffin. g h. numeri ſignificant dictũ quantitatũ a b. c d. aggregatum, ita ſcilicet, vt g. numerus ſit numerator, & h. nũs denominator. Itaq; g h. quantitas eſt propoſitarum a b. c d. quantitatũ congeries, quæ quærebatur. Quod ſi propoſitarum quantitatum altera tantùm binis notetur numeris, tunc reliquæ ſupplendus eſt numerus denominator, qui quidem in quantitatibus ad poſitam multiplicibus ſemper eſt vnitas, quæ integritatem poſitæ in integris ſignificat.

PROPOSITIO 7ª.

Duabus quantitatibus inæqualibus propoſitis, minorem à maiori ſubtrahere. Si propoſitæ quantitates ſingulis denotentur numeris: tunc numerus minor ſubtrahatur à maiori: nã relictus numerus erit is, qui ſignificat quãtitatẽ, quæ ſupereſt poſt ſubtractionem minoris quantitatis à maiori, per ſecundam huius. Si autem propoſitæ quantitates, quarũ altera ab altera ſubtrahenda eſt, ſingulæ binis exprimantur numeris. Sint ipſæ tunc a b. maior, & c d. minor: quarũ numeratores ſint a c. denominatores b d. ita vt oporteat quantitatẽ c d. ſubtrahere à quantitate a b. Ducatur a. in d. & fiat e. deinde b. in c. & fiat f. Mox ſubtrahatur ab e. numerus f. & reliquum ſit g. Ducatur demum b. in d. & fiat h. Eritque quantitas g h. cui⁹ numerator g. denominator h. quę relinquitur poſt ſubtractionem ipſius c d. quantitatis, ab ipſa quantitate a b. Cũ eñ d. mlt̃cans ſingulos a b. faciat ſingulos e h. erit, p pᵃ huius, ſicut a. ad b. ſic e. ad h. & ſimiliter, qm̃ b. mlt̃cans ſingulos c d. facit ſingulos f h. ideo ſicut c. ad d. ſic f. ad h. Quare per corollaria diffinitionum, quantitas e h. ipſi a b. & quantitas f h. ipſi c d. æqualis erit. Et quoniam h numerus eſt cõis earum denominator, ideo per 4ª huius, ipſæ quantitates e h. f h. ſunt ad inuicẽ ſicut e f. numeratores. Quamobrẽ exceſſus numeratorũ, ſcilicet g. nũs ſignificabit quantitatũ e h. f h. differentiã, hoc eſt, ipſa g h. quantitas erit talis dr̃ia: ſicut erat demonſtrandũ. Quòd ſi propoſitarũ quantitatum altera tm̃ binis notetẽ numeris: tũc reliquę ſupplẽdus eſt nũs denominator:

e. 12
f. 10
g. 2
h. 15

denominator: qui quidem in quantitatibus ad positam multiplicibus semper est vnitas, integritatem positæ ac non diuisæ significãs. Item notandum tam in præsenti, quàm in precedenti propositione, quòd quantitates, quæ ad positam multiplices sunt, & insuper particulares, aut superficientes redigendæ sunt ad partes, ita vt singulæ binis significentur numeris, atque modus demonstrandi locum habeat.

COROLLARIVM.

Hinc constabit, propositis duabus quantitatibus, vtra sit maior.

PROPOSITIO 8ª.

Duabus quãtitatibus propositis, alterã in alterã multiplicare.

Si propositæ quantitates singulis signentur numeris: tunc numeri significantes ipsas quantitates multiplicentur alter in alterum: Nam productum, per secundam huius, erit numerus significans quantitatem ex propositarum quãtitatũ multiplicatione productam. Si aũt quãtitates, quæ multiplicandæ proponuntur, singulæ binis significentur numeris: tunc sint ipsæ a b. c d. quarũ quidẽ numeratores sint a c. denominatores verò b d. Et ducatur numerus a. in numerũ c. & proueniat e. Itẽ ducatur numerus b. in numerũ d. & proueniat f. Eritq; quantitas e f. cuius numerator e. denominator f. productum ex multiplicatione quantitatis a b. in quantitatẽ c d. Nã, per quintã huius libri, ratio quantitatis e f. ad quãtitatẽ c d. cõponitur ex rationibus numeri e. ad numerũ c. & numeri d. ad numerũ f. Ratio aũt quãtitatis a b. ad positã cõponit ex ratione numeri a. ad vnitatẽ, & ex ratione vnitatis ad numerũ b. Sed per diffi. multiplicationis numerorũ, sicut a. numerus ad vnitatẽ, sic numerus e. ad numerum c. & sicut vnitas ad numerũ b. sic numerus d. ad numerũ f. Igitur, per equã proportionẽ, quantitas e f. ad quantitatẽ c d sicut quantitas a b. multiplicans ad positã. Quare, per diffi. multiplicationis, quantitas e f. est prædictum prouenienss ex ductu quantitatis a b. multiplicãtis in quantitatẽ c d. multiplicatã. quod quærebatur. Quòd si altera propositarũ quantitatũ duobus signetur numeris, reliquã verò vno: tunc huic supplẽdus est, vt in præmissis factũ est, numerator, hoc est, vnitas: Et si quantitatũ altera vel ambæ sint multiplices ad positam, & insuper superparticulares, vel superpartientes; tunc redigantur ad partes, ita vt singulæ binis connotatæ numeris, tã ad praxim, quàm ad demonstrationẽ accõmodẽtur.

a. b. $\frac{2}{3}$ — $\frac{4}{5}$ c. d. $\frac{8}{15}$ e. f.

PROPO-

PROPOSITIO 9ª.

Duabus quantitatibus propositis, alteram in alteram partiri.

Si propositæ quantitates singulis significentur numeris, tũc ijdem numeri quãtitatẽ ex diuisione vnius in alteram, prouenientẽ exprimerent, ita quidem, vt numerus diuisus sit numerator & diuidẽs denominator. Nã sicut se habet diuidẽs quantitas ad diuisam, sic se habet posita ad quantitatem ex diuisione prouenientẽ. Vt si sit diuidenda quantitas a. diuidens vero b. iam dico tunc, quod quantitas a b. est quantitas, quę prouenit ex diuisione ipsius a. in ipsam b. Nam per 4ª huius, sicut est numerus b. ad vnitatem, sic est quantitas a. ad quantitatem a b. quandoquidem earum numeratores sint æquales, quia. s. vtrobique est numerus a. & denominator quantitatis a. sit vnitas: denominator vero quantitatis a b. sit ipse b. Ergo sicut quantitas b. scilicet diuidens ad positam (quæ per vnitatem significatur) sic quantitas a. scilicet diuisa ad quantitatem a b. prouenientẽ. Quamobrẽ, per diff. diuisionis; ex diuisione quantitatis a. in quantitatem b. prouenit quãtitas a b. quod fuit demonstrandum. Quòd si quãtitates, quarum altera in alteram diuidenda est, singulæ binis denotentur numeris: tunc ipsæ a b. c d. quarũ numeratores a c. denominatores b d. ita vt ipsa a b. sit diuidẽda in ipsam c d. Ducatur d. in a. & proueniat e. Item c. in b. & proueniat f. eritque quantitas e f. cuius numerator e. ac denominator f. ea, quæ prouenit ex diuisione ipsius a b. in ipsam c d. Quoniam, per quintam huius, quantitatis a b. ad quantitatem e f. ratio, componitur ex ratione numeri a. ad numerũ e. & ex ratione numeri f. ad numerum b. Ac per diffin. multiplicationis in septimo Elementorum, sicut a. numerus ad ipsum e. sic vnitas ad d. Ac sicut f. numerus ad ipsum b. sic c. ad vnitatẽ. Et ratio quãtitatis c d. ad positam 50. ponitur ex ratione numeri c. ad vnitatem, & ex ratione vnitatis ad numerũ d. Propterea, per æquã proportionẽ, ratio quãtitatis a b. diuisę, ad quantitatem e f. prouenientẽ, erit, sicut ratio c d. diuidentis ad positam. Ergo, per diffin. diuisionis, ex diuisione quantitatis a b. in quantitatem c d. prouenit quãtitas e f. quod est propositum. Quod si propositarum quantitatum altera vno tantum significetur numero, tunc supplendus est ei denominator per vnitatem: vt in præmissis faciendum præcepimus. Etsi quantitatum altera vel vtraque sint multiplices ad positam, aut super particulares,

a. b. $\frac{12}{3}$ $\frac{12}{1}$ a.

c. d. $\frac{2}{3}$ × $\frac{8}{15}$ a. b. $\frac{24}{30}$ e. f. $\frac{4}{5}$

seu

ſeu ſuperpartientes, redigantur ſingulæ ad ſuas partes. Ita quidẽ, vt ſingulæ per numeratorẽ & denominatorẽ expreſſæ ad prędictã praxim & demonſtrationẽ accommodentur.

PROPOSITIO 10ª.

Omnis additio & omnis ſubtractio in quantitatibus cognitis irrationalibus fieri poteſt per terminos plus & minus. Namq; quãtitates, quarũ ſola quadrata, vel quarũ ſoli cubi, vel quarũ ſola ſecunda quadrata ſunt cognita, vt plurimum neq; coniungi poſſunt, niſi per terminos binomiorum: neq; altera ſubtrahi ab altera, niſi per terminos reſiduorum, vt ſi iungendæ ſint duæ quantitates r. 3. & r. 2. ſtatim dicã, earũ aggregatum eſſe r. 3. p⁹ r. 2. Si vero hæc ab illa ſubtrahenda ſit, ilicet reſpondebo, reſiduum poſt ſubtractionem eſſe r. 3. m̃. r. 2. Quandò tamen ad inuicem cõmenſurabiles fuerint, poſſunt ad vnũ nomẽ, tã in additione, q̃ in ſubtractione regi, vt poſtea docebimus. Illud tamen in binomijs, reſiduiſq; ſic prolatis, nunquàm non licet comperire quadratum, cuius radix ſit ipſum binomiale aggregatum, ſiue reſiduum, qđ p additionẽ, ſiue ſubtractione querendũ proponitur. Verùm tale quadratũ non niſi p duo nomina poteſt proferri, qñ propoſitæ quantitates fuerint incõmenſurabiles: vt poſtea per exẽpla declarabimus, regulas ſingulas tradentes.

PROPOSITIO 11ª.

Duas quantitates propoſitas, quarum vel quadrata tantùm, vel cubi tantùm, vel ſecunda quadrata tantùm cognita ſupponuntur, inuicem multiplicare. Sunto duæ quantitates a b. quarum quadrata c d. tantùm cognita ſupponuntur: ſi iubear a. in b. multiplicare, id faciam per quadrata. Sit enim ipſarum a b. productum e. quod cum rationale non ſit, exiſtentibus a b. inuicem incõmenſurabilibus, & perinde non ſemper poſſit exprimi numero; quærendum eſt per eius quadratum, quod ſemper rationale eſt, ſic. Multiplico, per 8ª huius, c. in d. & proueniat f. Aio igitur, ꝙ f. eſt quadratum producti quæſiti, hoc eſt ipſius e. Quod ſic oſtendo. Qm̃ a. multiplicans ſe ipſam facit c. & multiplicãs ipſum b. facit e. erit ideo, per primã 6ⁱ Euclidis, ſicut a. ad b. ſic c. ad e. Et ſimiliter, qm̃ b. multiplicans ſe ipſam, facit d. & multiplicans ipſam a. facit e. erit ſicut a. ad b. ſic e. ad d. Igitur c e d. ſunt continue proportionales. Quare per 15ª ſexti, quod fit ex c. in d. ſcilicet f. æquũ eſt quadrato, qđ ex e. qđ erat demõſtrandũ. Si cõtingat igitur ipſum f. productum eſſe quadratũ

	1	
a		b
2		3
c	e	d
4	6	9
g	f	h
16	36	81
	k	
	1296	

numerum,

numerũ: quod tũc fit, qñ a b. ſunt inuicẽ cõmẽſurabiles: tũc ipſum e. productum rationale eſt: quãdoquidẽ tunc quadrati nũi f. radix eſt. Ponantur nunc ipſarum a b. quantitatum quadrata ſecũda tm̃ rationalia, hoc eſt, cognita p numeros, quæ ſint g. & h. vt ſcilicet g. ſit quadratum ipſius c. atq; h. ſit quadratũ ipſius a. Rurſum, nunc per iſtec ſecunda quadrata veſtigabo productũ ipſarũ a b. ſic: Multiplico g. in h. per 8ª hui⁹, & proueniat k. Dico itaq; quod k. eſt quadratũ ſecũdũ ipſi⁹ e. producti, hoc eſt, quadratũ ipſi⁹ f. qđ ſic oſtendo. Cũ em̃ c. in ſe faciat g. & c. in d. faciat f. erit, per primam ſexti, ſicut c. ad d. ſic g. ad f. Et ſimiliter, quoniam d. in c. facit f. & d. in ſe facit h. ideo ſicut c. ad d. ſic f. ad h. Ergo g f. h. ſunt continue proportionales. Quare per 15ª ſexti, quòd fit ex g. in h. ſcilicet k. eſt æquum quadrato ipſius f. Quod erat oſtendendum. Id idem quoque haud difficilius oſtendemus de tertijs, quartis, & quotieſcunque quantitatum quadratis in infinitum. Nam quota ſunt quadrata quãtitatum multiplicantium, productum ex quadratis, totum quadratum erit à quadrato producti multiplicantiũ. Quod etiã oſtẽdit Cãpanus in fine decimi Elementoꝝ. Hoc itaq; pacto multiplicãtur ad inuicẽ quantitates potentia tm̃ rõnales, vel mediales primæ, vel cuiuſcũq; ordinis. Veniã nũc ad quantitatẽ cubo tm̃ rationales, hoc eſt, quarum ſolùm cubi ſupponuntur cogniti: quãuis de his nihil Euclides. Sunto, vt prius propoſitę quãtitates a b. quarũ productũ fuit e. & quarũ quadrata c d. & eorũ productũ f. Ducat a. in c. & fiat l. Itẽ b. in d. & fiat m. Eruntq; per diffin. l m. cubi quantitatem a b. per quos cubos quærimus nunc productũ ipſaꝝ a b. ſ. ipſum e. Multiplico igitur l. cubũ in m. cubũ, & ꝓueniat n. Aio nũc, ꝙ em̃ numer⁹ eſt cub⁹ ipſi⁹ e. hoc eſt, ꝙ ipſum e. productũ quæſitũ eſt radix cubica ipſi⁹ n. Qđ ſic oſtendã. Cũ ex a. in b. fiat e. & ex a. in c. fiat l. erit per primam ſexti, ſicut b. ad c. ſic e. ad l. Item cum ex d. in b. fiat m. & ex d. in c. fiat f. erit ſimiliter. ſicut b. ad c. ſic iam & m. ad f. Quare fiet ſicut m. ad f. ſic e. ad l. Et ideo, per decimãquartam ſexti, numerus n. qui fit ex l. in m. æqualis ei, quod fit ex e. in f. hoc eſt, cubo ipſius e. qui videlicet fit ex e. in ſuum quadratum f. Per diffin. igitur e. eſt radix cubicum ipſius n. Quod fuit demonſtrandum. Hac via multiplicandæ ſunt quantitates cubo tantùm cognitæ. Quando autem vna quantitatũ multiplicandaꝝ cognita per ſe proponitur, alterius aũt vel quadratum, vel cubus,

	1	
a		b
2		3
c	e	d
4	6	9
g	f	h
16	36	81
	k	
	1296	

	1	
a		b
2		3
c	e	d
4	6	9
l	f	m
8	36	27
	n	
	216	

vel

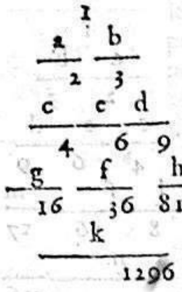
vel ſecundum quadratum tantùm cognitum offertur, tunc capiendum eſt ſimiliter quadratum, vel cubus, vel ſecūdum quadratum quantitatis per ſe cognitæ, & deinde quadratum in quadratum, ſiue cubus, in cubum, ſiue ſecundum quadratum in ſecundum quadratū multiplicandum eſt. & ſic deinceps pro tertijs, aut quotieſcunq; quadratis. Sic & demōſtratio dudū memorata procedet, & propoſitū abſoluetur.

COROLLARIVM.

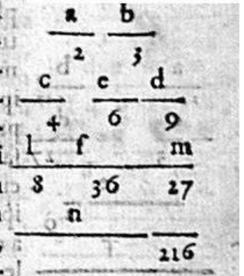
Vnde manifeſtum eſt, quòd ex ductu quadratorum, ſiue cuborum, ſiue ſecundorum quadratorum, aut ſequentium, ſemper producitur quadratum, ſiue cubus, ſiue quadratus ſecundus producti ex multiplicatione radicum, quarum quadrata, ſeu cubi, ſeu ſecunda, vel ſequentia quadrata. Quæ omnia, ſicut iam demonſtrata ſunt, ita per Arithmeticam praxim, tam in quantitabus rationalibus, quàm potentia, ſiue cubo, tantùm rationalibus, ſiue medialibus, ſiue duorum pluriumve nominum, ſupputando comprobātur, quemadmodum in Arithmeticis quæſtionibus per exempla tradidimus.

PROPOSITIO 12ª.

Duabus quantitatibus propoſitis, quarum quadrata tantùm vel cubi tantùm, vel ſecunda quadrata tantùm cognita ſupponuntur; alteram in alteram partiri. Quoniam, per diffinitionem, quando multiplicantur inuicem duæ quantitates, productum ad multiplicatam eſt, ſicut multiplicans ad poſitam: Iam ſi multiplicans nunc ſit diuidens, ac productum ſit diuiſum, erit multiplicata, quotiens. Quandoquidem, per diffin. diuiſa quantitas ad quotientem eſt, ſicut diuidens ad poſitum. Itaque diuiſo producto in multiplicantem, ſemper ex diuiſione prouenit multiplicans. Quod cum ita ſit, abſoluemus problema, per deſcriptionem penitus, ac ſuppoſitionem præcedentis propoſitionis. Sint igitur, ſicut in præmiſſa, propoſitę quantitates a b. quarū quadrata c d. productum autem e. & ipſarum c d. productum f. Oſtenſum eſt ergo, quòd f. eſt quadratum ipſius e. quòd ſcilicet f. fit ex ductu c. in d. Igitur ex diuiſione ipſius f. in ipſam c. proueniet ipſa d. quod eſt quadratum ipſius b. prouenientis ex diuiſione ipſius e. in ipſam a. Sit igitur, exempli gratia, diuidenda quantitas e. diuidens autem a. & offerantur harum quadrata tantùm, ſcilicet f. quadratum diuidendæ e. atque c. quadratum diuidentis a. diuidam ipſam f. in ipſam c.



ſam c. & proueniet b d. quadratum, ſcilicet ipſius b. quotientis: quoniam ſcilicet ex diuiſione producti in multiplicantem, prouenit multiplicata. Item quoniam ex multiplicatione ipſarum g h. quæ ſunt ſecunda quadrata ipſarum a b. producitur k. ſecundum quadratum ipſius e. producti ex ipſis a b. iam ſimiliter ſi pro diuidenda quantitate e. offeratur ſecundum eius quadratum f. & pro diuidente a. proponatur ſecundum eius quadratum g. tunc diuidam ipſam k. in ipſam g. & prouenit h. ſecundum quadratum ipſius b. quotientis. Nam ex diuiſione producti in multiplicantem, profilit multiplicata. Demum, quoniam ex multiplicatione cuborum l m. qui ſcilicet ſunt cubi ipſarum a b. producitur n. cubus ipſius e. producti primarij: non aliter, ſi pro quantitate e. partienda detur eius cubus n. & pro diuiſione a. ponatur eius cubus l. tunc partiar cubum ipſum n. in ipſum l. & proueniet m. cubus ipſius b. quotientis. Namque productum in multiplicantem diuiſum, exhibet multiplicatam. Nec ſecus faciendum pro tertijs, ac ſequentibus quadratis, quouſque proceſſerit curioſitas. Quod ſi diuiſor, aut diuidendus numerus ita offerantur, vt alter per ſe notus ſit, alterius verò tantum potentia vel cubus vel ſecundum quadratum cognitum proponatur: tunc par dignitas capienda eſt numeri per ſe cogniti, vt ſcilicet, vel quadratum in quadratum, vel cubum in cubum, vel ſecundum quadratum, in ſecundum quadratum, vel dignitatem quamuis in parem dignitatem partiaris: ſicut in multiplicatione factum eſt. Sic enim & demonſtratio dudum explicata locum habet, & quæſtio finem.



Exempla.

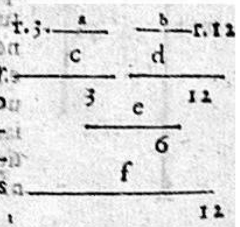
1—1—1 Valtas Rad.
2—3—6
4—9—36 □
8—27—216
16—81—1296 □ 2

COROLLARIVM.

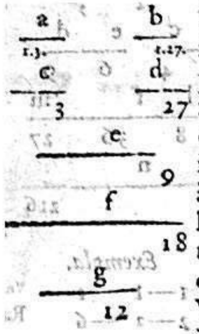
Ex quibus manifeſtum eſt, quòd ex diuiſione quadrati, in quadratum, ſiue cubi in cubum, ſiue ſecundi quadrati in ſecundum quadratum, ſemper prouenit quadratus, ſeu cubus, ſeu ſecundus quadratus illius quotientis, quod ex diuiſione radicis in radicem, quarum ſunt quadrata, vel cubi, vel ſecunda quadrata, prouenie-bat. Quod corollarium ſequitur ſimiliter ex præcedentis corollario, ſicut propoſitio ex propoſitione naſcebatur, per ipſas multiplicationis & diuiſionis diffinitiones.

PROPOSITIO 13ª.

Propoſitarum duarum quantitatum per potentias cognitas, aut per cubos tantùm datos, congeriem, aut exceſſum veſtigare. Sunto duæ quantitates a b. quarum quadrata c d. cognita ſint. Volo earum congeriem pronunciare. Per vndecimam huius, multiplico a in b. per nota ipſarum quadrata c d. & proueniat e. Huius



duplum ſit f. Sumo igitur aggregatum ipſarum c d f. dico enim quòd tale aggregatum eſt quadratum congeriei quæſitæ. Nam per 4ª ſecundi Elementorum, aggregatum ex duobus quadratis, duploq; producti radicũ, quarum ſunt quadrata, conficiunt quadratum congeriei radicum. Item ſunto duæ quantitates a b. quarum maior b. & earum quadrata ſint c d. Volo ſubtrahere ipſam a. ab ipſa b. Per 11ª huius, multiplico a. in b. per earũ potentias c d. & proueniat e. Huius duplum ſit f. quod ſubtraho ad aggregato ipſarum c d. & reſiduum ſit g. Dico igitur, quòd g. eſt quadratum eius quantitatis, quæ relinquitur poſt ſubtractionem ipſius a. ab ipſa b. Nam per 7ª ſecundi Elementorum, quadratum quãtitatis, à qua fit ſubtractio, vnà cum quadrato ſubtractæ, ſumptum æquale eſt quadrato reſidui vnà cum duplo eius, quod fit à tota in ſubtractam. Quam obrem, ſi tale duplum ſubtrahatur ab aggregato quadratorum totius & ſubtractæ, ſupereſt quadratum reſidui.



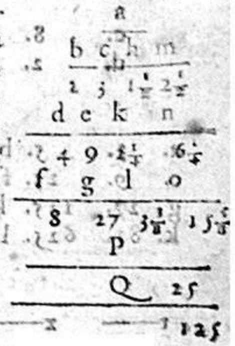
Vbi notandum eſt, quòd quando duæ quantitates propoſitæ ſunt inuicem commenſurabiles, tunc, quoniam ipſę ſunt eiuſdem ſpeciei: & earum tam congeries, quàm conceſſus eſt & eiuſdem ſpeciei quantitas. Exempli gratia: ſiue propoſitæ quantitates ſint potentia tantùm rationales inuicem commenſurabiles: tunc earum tam congeries, quàm differentia erit quantitas vnius nominis potentia tantùm rationalis. Si autem propoſitæ quantitates ſingulæ ſint vnius ſpeciei binomia: & perinde commenſurabiles: tunc earum tam congeries, quàm differentia erit eiuſdem ſpeciei binomium: Et ſimiliter de reliquis irrationalium ſpeciebus dicendum: Quæ omnia & in decimo Elementorum demonſtrantur, & calculo practico comprobantur. Sed regulę in hac propoſitione aſſignatæ quantitatibus potentia rationalibus tantùm vſu veniunt: non & ijs, quarum cubi tantùm, aut quarum ſecunda quadrata tantùm cognita offeruntur. Sed pro vniuerſis quantitatibus, tam potentia tantùm, quàm cubo tantùm, quamque ſecundo quadrato vel quotacunque potentia tantùm cognitis, dabimus hìc vnicam & auream regulam, quam hìc ſimul trademus & demonſtrabimus.

Aurea regula.

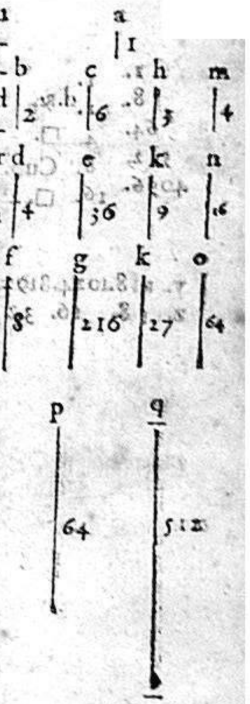
Sit a. magnitudo poſita, quæ denominatur ab vnitate. b c. duæ magnitudines datæ. Sit d. quadratum ipſius b. & e. quadratum ipſius c. Itẽ f. cubus ex b. & g. cubus ex c. Et tunc ſi ſecetur c in b. & proueniat h. Item e. in d. & proueniat k. Item g. in f. & proueniat l. erũt iam ſicut a b d. & ſicut ipſo a c e g. ita & ipſe a h k l. per diffinitionem quadratorum, & cuborum, & per diffinitionem diuiſionis continuè proportionales. Quare per diffinitionem h. radix k,

quadratum

quadratum & l. cubus talis radix erunt. Quibus cõſideratis, ſi velim aggregare quantitates b c. per earum quadrata d e. vel per earum cubos f g, ponam m. æqualem aggregatum ipſarum a h. & faciam n. quadratũ ipſius m. & eiuſdem m. cubum o. Mox ducam d. in n. & proueniat p. Item ducã f. in o. & proueniat q. Aio tũc, quod p. erit quadratum totius b c. quodq; q. erit cubus eiuſdem b c. totius. Et ſic habeo tã per quadratos, q̃ per cubos aggregatũ ipſarũ b c. Hoc eſt, habeo tã quadratũ, q̃ cubũ talis aggregati, qñ aliter in notitiã non venit. Atq; ita deinceps fiet per ſecunda & quotacunq; quadrata: Quod ſic oſtẽditur. Cũ, per diffi. diuiſionis. ſit ſicut e. ad b. ſic h. ad a. erit coniunctum totum c b. ad ipſum b. ſicut totũ h a. ad ipſum a. hoc eſt, c b. ad ipſum b. ſicut m. ad a. Quare per 15ª ſexti Euclid. qđ fit ex a. in b c. hoc eſt, ipſum aggregatũ b c. æquale erit ei, quod fit ex b. in m. Itaq; cũ ex b. in m. hoc eſt, ex radice in radicem producatur totũ b c. iã, per corollariũ vndecimæ huius, ex d. in n hoc eſt, ex quadrato in quadratũ producetur quadratũ totius b c. qđ fuit p. & ex f. in o. hoc eſt, ex cubo in cubum, producetur cubus totius b c. qui fuit q. quod erat demonſtrandum.



Et ſimiliter per eadẽ omnino, idipſum oſtẽdetur de ſecundis quadratis, cæteriſq; dignitatibus magnitudinum. Quod ſi velim ſubtrahere quantitatem b. de tota b c. per quadrata earum d. & p. tunc diuidã quadratũ ipſius b c. ſcilicet ipſam p. per quadratũ ipſius b. ſcilicet per ipſam d. Et proueniet ex iã demonſtratis, ipſa n. cuius radix quadrata eſt m. A qua ſubtraho a. vnitatem & ſupererit h. cuius quadratũ, ſcilicet ipſam k. duco in d. quadratũ, ſcilicet ipſius b. ſubtrahendæ: & proueniet e. quod ex quadratũ ipſius c. quæ ſupereſt poſt ſubtractionẽ ipſius b. à tota b c. ſic per quadrata ſubtractæ & eius, à qua fit ſubtractio, habeo quadratum relictæ. Eadem quoq; ſubtractio fiet per cubos quantitatum ſcilicet per f. & q. ſic. Diuidã cubũ ipſius b c. ſcilicet q. in cubum ipſius b. ſcilicet f. & proueniet ex demonſtratis ipſa o. cuius radix cubica eſt m. De qua minuo a. vnitatẽ, & relinquetur h. cuius cubum l. duco in f. cubũ ipſius b. ſubtrahendæ: & proueniet g cubus ipſius c. relictæ poſt dictam ac propoſitam ſubtractionem. Et per eandem idipſum in ſecundis quadratis cæteriſque deinceps eueniet. Quæ quidem regula, quoniam communis eſt vniuerſis in infinitum quantitatum dignitatibus, à nemine hactenus animaduerſa, & demonſtrata, meritò aurea fuit appellanda.



PROPOSITIO 14ª.

c.	8.		
d.	2.		
a.	3.	5.	b
e.	9.	25.	f
g.	27.	125.	k
h.	81.	625.	l
t		x	
m.	18	50.	n
p.	54	250.	q
r.	162	1250.	ſ

1.	1.	
8.	2.	d.℞.
64.	4.	□.
512.	8.	Cub.
4096.	16.	□. 2ⁱ

y.	128.	1024.	8192.
z.	8.	16.	32.

Duas propoſitas quantitates potentia tantùm, vel cubo tantùm, vel ſecundo quadrato tantùm rationales, inuicem commenſurabiles inuicem coniungere: vel alteram ab altera ſubtrahere. Quoniam duæ quantitates commenſurabiles inuicem ſupponuntur, erant ſicut numerus ad numerum: ſint ergo ſicut numerus a. ad numerum b. quarum maior b. & horum numerorum aggregatum ſit c. differentia verò d. Itẽ ipſorum a b. quadrati ſint e f. cubi g h. quadrati ſecundi k l. Quantitates autem propoſitæ, ſi potentia tantũ ſint rationales, ſint earum potentiæ ſeu quadrata m n. Si autem cubo tantùm rationales, earum cubi ſint p q. ſi tandem quadrato ſecundo rationales, earum quadrata ſecunda ſint r ſ. Ipſæ autem quantitates ſint t x. & quoniam t x. ſunt ad inuicem ſicut numeri a b. ad inuicem, neceſſe eſt, vt & m n. ipſis e f. & ipſi p q. ipſis g h. nec non ipſi r ſ. ipſis k l. ſint proportionales. Quoniam, ſcilicet quantitatum proportionalium, tam quadrata ad inuicem, quàm cubi ad inuicem, & quàm ſecunda quadrata ad inuicem & deinde pares dignitates ſemper proportionales ſunt; propterea videlicet, quòd quadrata duplicant, cubi triplicant, quadrati ſecunda quadruplicant, & ſic deinceps proportionem radicum. Hinc ſequitur, quoniam per coniunctam, & euerſam proportionem, ſicut eſt c. numerus ad d. numerum, aggregatum ſcilicet a b. ad eorum differentiam, ſic eſt aggregatum quantitatum t x. ad earum differentiam: Idcirco & talium aggregatorum quadrata, talium differentium quadratis; & cubi cubis, & ſecũda quadrata ſecundis quadratis proportionalia erunt, & deinceps ſequentia. Vnde ſicut eſt m. numerus ad e. numerum: ſiue ſicut n. numerus ad f. numerum, hoc eſt, ſicut quadrata ſingularum quantitatum t x. ad quadratos ſingulos numerorum a b. ſic erit quadratum aggregati quãtitatum t x. ad quadratum ipſius c. nec non ſic erit quadratum differentiæ quantitatum t x. ad quadratum ipſius d. idemque de cubis, & de ſecundis quadratis dicendũ. Quoniam igitur quantitates t x. notæ ſunt per quadrata m n. tantum tunc ſicut eſt m. ad e. ſic ſit y. numerus ad quadratum ipſius c. Item ſic ſit z. numerus ad quadratum ipſius d. Nam ex iam demonſtratis y. numerus erit quadratum aggregati ipſarum t x. & z. numerus erit quadratum differentiæ ipſarum t x. Sic noteſcit per quadrata tam congeries, quàm exceſſus propoſitarum quantitatum. Quoniam autem quantitates t x. cubo tantum ſunt rationales: tunc ſimiliter quæretur earum tam congeries, quàm exceſſus per cubos; Si demum quadrato ſecundo tantùm rationales; tunc talis congeries & exceſſus per ſecunda quadrata notificabitur.

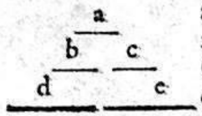
COROLLARIVM.

Ex quibus manifeſtum eſt, huiuſmodi duarum quantitatum tam aggregatum, quàm differentia, ſemper eſt quantitas vnius nominis & vtrique ipſarum commenſurabilis.

PROPOSITIO 15ª.

Duarum quantitatum plurium nominum, aggregatum, aut differentiam veſtigare. Quando nomina quantitatum ſunt ad inuicem incõmenſurabilia: tunc congregatio haud aliter fieri poteſt, quàm aggregatis membris per aduerbium Plus: nec etiam dr̃a aliter proferri, quàm per aduerbiũ Minus: ſicut oſtendit Euclides in decimo, tam de binomijs, quàm de reſiduis. Vbi verò fuerint duo nomina inuicem cõmenſurabilia: tunc ea, per præcedentem, coniuncta conflant vnam quantitatem, & ideo redigenda ſunt ad vnũ nomen in additione. Quod ſi minor à maiori ſubtrahatur, ſupereſt quantitas vnius nominis, in ſubtractione. Semper igitur duo nomina, quæ in additione, vel ſubtractione ad vnum redigi poſſunt, redigenda ſunt, vt quàm pauciſſimis nominibus ſiue aggregatum, ſiue differentiam proferamus. Et in additione hoc ſemper attẽdendũ, quòd nomina per Plus geminata, Plus conficiunt: Per Minus verò notata, Minus. tantum, inquam, Plus, ſeu tantum Minus, quantũ coniuncta conflant. Quòd ſi nominum alterũ per plus, alterũ per minꝰ notetur, tunc eorũ exceſſus adijciendus, aut ſubtrahendus erit ſummæ: adijciendus quidẽ, qñ nomen per plus notatũ, maius eſt; ſubtrahendus verò, cum maius eſt reliquum nomen. Vnde ſi nomina contrarijs titulis inſignita, fuerint æqualia, tunc nihil conflant: nam quod inde adijcitur, hinc ſubtrahitur, & ita ſumma intacta permittetur. In ſubtractione verò, ſi nominum vtrunque per plus notetur, ſupererit differentia nominũ per plus qdẽ notanda, cum illud nomen à quo fit ſubtractio maiꝰ eſt: per Minus vero inſcribenda, cum ſubtrahendũ nomen maius eſt. Quando aũt nomina æqualia, nil reſtat. Quòd ſi ambo nomina per minus notata ſint, ſimiliter ſupererit exceſſus nominum; verùm per Plus notandus, cum maius nominum erat ſubtrahendum: per minus autẽ inſcribendus, quando reliquum nomen maius fuerit Nam æqualitas eorum rurſum nihil reſiduat. Demum, ſi nominum alterum per Plus, alterum per Minus inſcribatur: tũc eorum aggregatum pro relicto ſubtractionis ſubſcribendũ eſt cum aduerbio Plus, vel Minus, cum quo ſcilicet notabatur nomẽ, à quo fit ſubtractio. Quæ præcepta ita ſunt in triuialibus ſcholis trita, & per conceptum animi cognita, vt demonſtratione non egeant. Igitur ad reliqua tranſeundum.

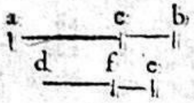
PROPOSITIO 162.



Quantitatem vnius nominis in quantitatem duorum aut plurium nominum multiplicare. Quantitas vnius nominis sit a. binominis autem quantitas b c. sub duobus nominibus b. & c. prolata. Oportet multiplicare a. in b c. Multiplico per vndecimam huius, quantitatem a. in nomen b. & fiat d. Item multiplico, per eandem, a. in nomen c. & fiat e. Dico igitur, quòd quantitas conflata ex nominibus d e. est productum quod fit ex multiplicatione ipsiꝰ a. in ipsam b c. Nam, per secundi Elementorum primam, quæ fiũt ex ductu vnius quantitatis in parte propositæ quantitatis pariter accepta conficiunt illud, quod fit ex dicta quantitate in totam propositam. Itaque d e. productum est ex multiplicatione ipsius a. in ipsam b c. factum: quod quærebatur.

PRÆAMBVLVM.

Verùm in multiplicationibus binomiorum ac residuorum, hoc est prænotandum, quòd si nomina multiplicanda inscribantur per Plus aut per Minus vtraque, tunc productum ex eorum multiplicatione factum inscribendum erit per plus: si vero alterum nominum per Plus, alterum per Minus notetur, productum per minus notandum erit. Quod ita esse, breui demonstratione arguemus. Sunto dua residua, vnum, a b. b c. Alterum d e. e f. cùm enim residua ipsa sint quantitates a c. d f. quę restant per abscisionem minorum nominum à maioribus, illud sic pronuntiatur a b. minus b c. hoc est, quod superest, subtracta quantitate b c. à quantitate a b. aliter enim exprimi non potest, cum sit quantitas irrationalis, per abscisionem quantitatis à quantitate sibi incommensurabili factam relicta: & similiter alterum sic profertur d e. minus d f. hoc est, quod relinquitur, dempta quantitate e f. à quantitate d e. illud inquam, residuum est quantitas a c. sicut dictum est, relicta. Hoc autem residuum quantitas d f. per similem abscisionem remanens. Quæ cum aliter, quàm per nominum, ex quorum abscisione generantur, hoc est, quorum excessus sunt, proferri nequeant: etiam si alterum in alterum multiplicandum erit; talis multiplicatio non nisi per nominum multiplicationem fieri poterit. Si igitur residuum a b. b c. multiplicandum est in residuum d e. e f. non aliter multiplicatio fieri potest, quàm multiplicando hæc nomina singula in illa singula: vnde fiet quadruplex multiplicatio, prima scilicet a b. in



a c. d f. +
a b. d e. { a c. e f. plus+ ; b c. d f. plus+
b c. d f. plus —

a b. e f. { a c. e f. Minus+ ; b c. e f. Minꝰ —

d e. b c. { b c. d e. Minꝰ + ; b c. e f. Minꝰ —

d e. Se-

d e. Secunda a b. in e f. Tertia d e. in b c. Quarta b c. in e f. Harum prima, per primam secundi Elementorum Euclidis, continet quatuor multiplicationes se ipsam integrantes, scilicet a c. in d f. a c. in e f. b c. in d f. b c. in e f. Secunda continet duas multiplicationes se ipsam perficientes, scilicet a c. in e f. & b c. in e f. Tertia item duas, ex quibus componitur, scilicet b c. in d f. b c. in e f. Quoniam, scilicet producta partium integrant productum integrorum. Quarta verò vnica est, scilicet b c. in e f. quoniam fit ex nominibus indiuisis: & cum prædictis octo posita facit nouem multiplicationes. Productum autem quæsitum est, quod fit ex multiplicatione a c. in d f. Quod haberi non potest, nisi paractis dictis quatuor multiplicationibus, quæ continent nouem ductus. Ex quibus consuendum sit solum illud quod fit ex a c. in d f. necesse est cætera octo producta esse abijcienda: quod fieri non potest nisi dimidium eorum notetur per plus, ac reliquum dimidium per minus; atque ita alterum altero repensante, summa quęsita, quæ fit ex a c. in d f. seruentur intacta. Sed ex dictis cæteris octo productis, tria prima multiplicationis, scilicet quę fiunt ex a c. in e f. ex b c. in d f. & ex b c. in e f. inscribi debent per aduerbium Plus, quoniam sunt membra primæ multiplicationis, quæ fit ex nominibus a b. d e. per idem aduerbium notatis. Duo autem producta secũdæ multiplicationis, ex a c. in e f. & b c. in e f. notanda per aduerbium Minus: quoniam sunt membra secundæ multiplicationibus, quę fit ex nominibus a b. e f. quorum alterum per aduerbium Minus inscribitur. Duo quoque producta tertiæ multiplicationis, ex b c. in d f. & ex b c. in e f. similiter per aduerbium Minus notata intelliguntur, quoniam tertia multiplicatio quorum membra sunt constat ex nominibus, d e. b c. quorum alterum per minus notatur. Octauum igitur productum, quod fit ex b c. in e f. nominibus inscriptis per minus; necesse est, vt inscribatur per Plus: atque ita fiant quatuor producta inscripta per Plus, & totidem producta paria inscripta per Minus: & perinde tantum his minuentibus, quantum illa superaddunt, Summa quæsita, quæ fit ex a c. in d f. intacta permaneat. Constat igitur, quòd ex ductu nominum per aduerbium, Minus, notatorum producitur quantitas per aduerbium, plus, notanda. Sed illud exemplum satis esse debet, quòd plus in plus multiplicatum, siue minus in minus, omnino producit plus: quemadmodum affirmatio affirmationis affirmat, & negatio negationis affirmat similiter. Item sicut affirmatio negationis, siue negatio affirmationis negat: Ita

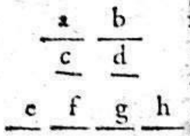
b c. e f. } b c. e f. Plꝰ —

 siue

siue Plus in Minus, siue Minus in Plus multiplicatum producit Minus. Potes exemplificare regulam & comprobare demonstrationem per numeros rationales, vt sic singulæ nouem multiplicationes distinctæ appareant: & facilius omnia intelligantur.

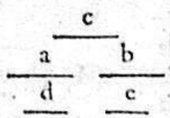
PROPOSITIO 17ª.

Duas propositas quantitates, singulas duorum, aut plurium nominum, inuicem multiplicare. Proponatur binomium a b. ex duobus nominibus a. & b. multiplicandum in binomium c d. ex duobus nominibus c.& d. compositum: siue illa sint residua singula binis nominibus expressa, siue alterum Binomium, & alterum residuum. Multiplicētur, per vndecimam, & per præcedentem, singula vnius quantitatis nomina in singula alterius nomina, hoc est, c. in a. & fiat e. Item c. in b.& fiat f. Item d. in a.& fiat g. Item d.in b. & fiat h. seruatis tamen regulis circa inscriptiones aduerbiorum, Plus, aut Minus, in præcedenti propositione traditis. Nam quantitas compacta ex quatuor nominibus e f g h. seruatis aduerbiorum terminis, erit, per primam secundi Elementorum, productum ex multiplicatione totius a b. in totam c d. quantitatem, proueniens. Illud quoque notando: si nomina huiusmodi possunt ad minorem multitudinem redigi, redigantur, per 14ª huius: quod fieri potest inter quælibet bina inuicem cōmensurabilia: Nam per corollarium dictę 14ª talium binorum nominum tam aggregatum, quàm differentia facit quantitatem vnius nominis. Non aliter trinomia, aut quadrinomia multiplicabuntur, singula vnius quātitatis nomina in singula alterius, per vndecimam huius, multiplicando: & deinde bina quę ad vnum nomen redigi possunt, redigēdo. Quę omnia poteris practico exēplo experiri. Quod nos in quęstionib⁹ Arithmeticis abūdè fecim⁹.



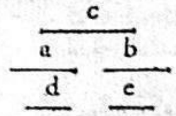
PROPOSITIO 18ª.

Propositam quantitatem duorum aut plurium nominum, in datam vnius nominis quantitatem partiri. Esto Binomium quoddam siue Residuum a b. ex nominibus duobus a. & b. confectum: quod diuidendum sit per quantitatem c. Diuidatur per duodecimā huius, nomen a. in quantitatem c. & proueniat d. Item diuidatur nomen b. in eadem c.& proueniat e. Iam ex multiplicatione ipsius c. in d. fiat a.& ex multiplicatione ipsius c. in e. consurget, b. Nam diuisor in quotiētem multiplicatus producit diuisum. Igitur, per



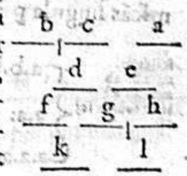
primam

primam secundi Elementorum, ex ductu c. in totam d e. fit tota a b. Et quoniam productum diuisum in multiplicantem, exibet multiplicatam: idcirco tota a b. quod est productum, diuisa in ipsam a. multiplicantem, exhibebit ipsam d e. multiplicatam. Itaque d e. est quantitas quotiens ex diuisione proposita proueniens. Similiter faciendum est, si diuidenda quantitas sit trinomium, aut plurium nominum. Sed memento, sicut in antepræmissa per multiplicatione fecimus, ita & in diuisione animaduertere nominum inscriptiones: Nam nomen inscriptū per aduerbium Plus, si diuidatur per nomen similiter inscriptum: quotiens diuisionis similiter inscribetur. Si autem diuidatur per nomen aduerbio Minus inscriptum, quotiens diuisionis, per Minus inscribetur. Quoniam scilicet, tam Plus multiplicatum in Plus, quàm Minus multiplicatum in Minus, producit Plus, vt in ante præmissa ostendimus. Nomen autem inscriptum per aduerbium, Minus, si diuidatur per nomen similiter notatum, quotiens diuisionis per Plus inscribetur. (quod non vsu venit, quia diuisor vnius nominis semper per plus notatur.) Si autem diuidatur per nomen notatum per Plus, quotiens inscribetur per Minus. Quoniam scilicet in multiplicationibus tam Plus in minus, quàm Minus in Plus multiplicatum, producit Minus. Sicut enim diuisionis demonstratio fit per multiplicationis demonstrationem: ita & diuisionis regulæ & cautiones ex præceptis multiplicationis deriuantur. Quæ sunt etiam triuialibus Magistris notissimæ, & in quęstionibus nostris Arithmeticis affatim per exempla traditæ.



PROPOSITIO 19ª

Propositam duorum aut plurium nominum quantitatem, in datam duorum nominum quantitatem diuidere. Esto quantitas a. duorum, aut plurium nominum: hanc partiri iubemur per binomium b c. cuius nomina sunt b c. Capiatur d e. Residuum eorundem nominum, ex quibus cōponitur b c. hoc est, vt d. nomen, ipsi b. nomini: & e. nomen ipsi c. nomini æquale sit. Si autem b c. diuisor fuerit Residuum duorum nominum: tunc capiatur d e. binomium eorūdem nominum: Deinde, per 17ª præcedentē, multiplicetur quātitas b c. in quantitatem d e. & proueniat quātitas f. quæ erit quātitas vnius nominis, per 113ª vel per 117ª decimi Eucl. Nā binomium in suum residuū multiplicatū producit quātitatē rationalē. Itē per 17ª præmissam multiplicetur a. in d e. & proueniat g h. Eritq; per primā sexti Euclid. sicut b c. ad ipsam a. sic quantitas f. ad ipsam g h. Diuidatur itaque, per præcedentē, quantitas g h. in ipsam f. & proueniat k l. Dico itaque, quòd



k l. est

k l. eſt quantitas, quæ prouenit ex diuiſione ipſius a. in ipſam b c. Nam cùm g h. diuidatur in f. & proueniat k l. iam, per diffin. diuiſionis, erit, ſicut g k. ad ipſam k l. diuiſa ſcilicet ad quotientem, ſic f. diuidens ad poſitam. Et permutatim ſicut g h. ad ipſam f. ſic & k l. ad poſitam. Verùm fuit g h. ad ipſam f. conuerſim ſicut a. ad ipſam b c. Ergo & a. ad ipſam b c. ſicut k l. ad poſitam. Et permutatim a. diuiſa ad ipſam k l. ſicut b c. diuidens ad poſitam. Quare, per diffin. diuiſionis, k l. quantitas eſt, quæ prouenit ex diuiſione ipſius a. in ipſam b c. quæ veſtiganda proponebatur. Quòd ſi diuiſor eſſet trium nominum: oporteret geminari multiplicationem, vt productum tandem proueniat vnius nominis: & diuidendam per eundem multiplicatorem multiplicari: & deinde productum per productum diuidendum.

PROPOSITIO 20a.

Si quantitas quælibet in duo ſegmenta diuidatur; id quod fit ex vtrolibet aſſumpto ſegmento in quadratum totius, æquum erit his duobus, ſcilicet, quæ fiunt ex vtraque ſectionum in quadratum reliquæ, & ei quod fit ex quadrato aſſumpti ſegmenti in totam. Sit quantitas quælibet, vtcunque in duo diuiſa, ſcilicet in a. & b. Dico, quòd id, quod fit ex a. in quadratum a b. æquum erit his, ſcilicet ei, quod fit ex a. in quadratum b. & ei, quod fit ex b. in quadratum a. eique, quod fit ex quadrato a. in totam a b. Quod ſic oſtendam. Per quartam ſecundi Euclidis, quadratum a b. eſt æquale his, ſcilicet quadrato b. & ei quod fit ex a. in b. eique quod fit ex a. in a b. Ergo propter ęquam vtrobique multiplicationem, quod fit ex a. in quadratum a b. æquale erit his, ſcilicet ei, quod fit ex a. in quadratum b. cum eo, quod fit ex a. in productum ex a. in b. atque cum eo, quod fit ex a. in productum ex a. in totam a b. Sed id, quod fit ex a. in productum ex a. in b. æquum eſt ei, quod fit ex quadrato a. in b. Illud autem, quod fit ex a. in productum ex a. in totam a b. æquum eſt ei, quod fit ex quadrato a. in totam a b. Sunt enim eadem ſolida, quandoquidem ſub tribus iiſdem lateribus. Igitur & id, quòd fit ex a. in quadratum a b. æquum erit his, ſcilicet ei, quòd fit ex a. in quadratum b. & ei, quod fit ex quadrato a. in b. eique quod fit ex quadrato a. in totam a b. Quod fuit demonſtrandum.

a b

per 4a ſecundi.

□. ab { □. b. / ▭. a. b / ▭. a. a b

Igitur mlcãs ſingula p a

ſolidum. a. a b. a b æquum eſt trib9 ſolidis ſcꝫ { a.b.b / a.a. b / a.a.ab

Quod eſt ꝓpoſitũ

PROPOSITIO 21a.

Si quantitas qualibet in duo ſegmenta ſecetur: Cubus, qui ex tota; æquum erit his, ſcilicet duobus cubis ſectionum, & triplo eius, quod fit

fit ex quadrato vtriuſque in reliquam. Sit a b. quantitas, vtrunq; in duo diuiſa, ſcilicet in a. & in b. Dico, quòd cubus totius a b. æqualis erit his, ſcilicet cubo ipſius a. & cubo ipſius b. & triplo eius, quod fit ex quadrato a. in b. necnon & triplo eius, quod fit ex quadrato b. in a. Quod ſic oſtendam. Per quartam ſecundi Elementorum, quadratus totius a b. eſt æquum his, ſcilicet quadrato ipſius a. quadrato ipſius b. & duplo eius, quod fit ex a. in b. Ergo, propter æquam vtrobique multiplicationem, cubus a b. æqualis erit his, ſcilicet ei, quod ex a b. in quadratum ipſius a. & ei quod ex a b. in quadratum ipſius b. & duplo eius, quod ex a b. in productum ex a. in b. Sed per primam ſecundi Elementorum, quod fit ex quadrato ipſius a. in a b. æquum eſt his, ſcilicet eis quod fit ex quadrato ipſius a. in a. ſcilicet cubo ipſius a. & ei quòd fit ex quadrato ipſius a. in b. Illud autem, quod fit ex quadrato ipſius b. in totam a b. æquum eſt his, ſcilicet ei, quod fit ex quadrato ipſius b. in b. ſcilicet cubo ipſius b. & ei, quod fit ex quadrato ipſius b. in a. Item per primam ſecundi Elementorum, quod fit ex producto ipſarum a b. in totũ a b. ęquũ eſt his ſcilicet ei quod fit ex producto ipſarum a b. in a. & ei, quod fit ex eodem producto in b. Sed quod fit ex producto ipſarum a b. in a. æquũ eſt ei, quod fit ex quadrato ipſius a. in b. Illud autem, quod fit ex producto ipſarum a b. in b. æquum eſt ei, quod fit ex quadrato ipſius b. in a. Ergo quod fit ex producto ipſarum a b. in totã a b. æquum erit his, ſcilicet ei, quod fit ex quadrato ipſius a. in b. & ei, quod fit ex quadrato ipſius b. in a. Quare & duplum eius, quod fit ex produto ipſarum a b. in totam a b. æquum erit his, ſcilicet duplo eius, quod fit ex quadrato ipſius a. in b. & duplo eius quod fit ex quadrato ipſius b. in a. Ergo commutatis ęqualibus, cubus totius a b. ęqualis erit his, ſcilicet cubo ipſius a. cubo ipſius b. triplo eius, quod fit ex quadrato ipſius a. in b. & triplo eius, quod fit ex quadrato ipſius b. in a. Quod fuit demonſtrãdũ.

a b

per 4a ſecundi

□.ab—□.a.□.b.▭a.b ▭

Ergo

Cubus a b. æquus eſt trib9 ſolidis { a b. a a. / { a b. b.b. / duploq; / ipſi9 a b.a.b

ſed per p. 2i

Cub9 a. & ſolidũ a. a. b æq̃lia sũt ſolido a.a.ab.

Item

Cub9 b. & ſolidũ b. b. a æq̃lia sũt ſolido. b.b.a b.

Item

Solidũ a.b.a b. æquũ eſt ſolidis. a. a.b. atq; b.b.a

Et ideo

duplũ illi9, ęquũ duplo horũ.

Igitur

Cub9 a b. æquatur { Cubo a. / { Cubo b. / triplo ſolidi. a.a. / Triplo ſol. . . . .

PROPOSITIO 22a.

Si quantitas quælibet in duo ſegmenta diſpeſcatur, cubus totius æqualis erit his, ſcilicet duobus cubis ſegmentorum, & triplo ſolidi, ſub tota & ſingulis ſegmentis contenti. Eſto, vt prius, quantitas a b. vtcunque ſecta in a. & b. ſegmenta: Dico, quòd cubus totius a b. equalis eſt his, ſcilicet cubo ipſius a. Cubo ipſius b. & triplo ſolidi, cuius latera ſunt tota a b. a. & b. Quod ſic oſtendam. Per præcedentem, cubus totius a b. æqualis eſt his, ſcilicet cubo ipſius a. cubo ipſius b. & triplo eius, quod ex quadrato ipſi9

a b

per præmiſſam.

Cub9 a b. { Cubo. a. / { Cubo. b / triplo ſolidi. a. a b. / triplo ſolidi. b. b. a.

a. in

ſed per p[a] 21 □.a.cũ ▭. a b.ęq̃lia ſunt ſimul ſumpta ▭.a b.a

Igitur

Solidum a.a.b.cũ ſolid. b. b. a. ęqualia ſunt ſolido a b. a b.

Quare &

Tripla illorũ ęq̃lia triplo hui[9].

Ergo.

Cub[9] a b. { Cubo. a. { Cubo b { triplo ſoli- di. a b. a. b.

Quod eſt ꝓpoſitum.

a.in b.ac triplo eius, quod ex quadrato ipſius b.in a. Sed per primam ſecũdi Euclidis, quadratum ipſius a.cum eo quod ex a. in b. ſimul ęqualia ſunt ei quod ex a b. in a. Et per eand m, quod fit ex quadrato ipſius a.in b. vnà cum eo, quod fit ex a b.in b æquale eſt ei, quod ex producto totius a b. & a.in b. hoc eſt, ſolido trium laterũ a b. a. b. Atque, quod ex producto totius a b. in b.æquale eſt ei, quod ex quadrato ipſius b. in a. hoc eſt, ſolido trium laterum a. b. b. Igitur, quod ex quadrato ipſius a. in b. vnà cum eo, quod ex quadrato ipſius b. in a.æqualia ſunt ei, quod ex producto ipſius a b. & a. in b. hoc eſt ſolido trium laterum a b. a. & b. Quare & triplum illius, æquale triplo huius. Ergo cubus totius a b. æqualis erit his, ſcilicet cubo ipſius a. cubo ipſius b. & triplo ſolidi, cuius latera ſunt a b. a. b. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO 23[a].

Si fuerint duo numeri in proportione cuborum numerorum, qui fiet ex vno eorum in quadratũ reliqui, cubus erit. Sunto duo ſolidi numeri ſimiles a d. tales enim vt in octauo Elementorum oſtenſum eſt, habent adinuicem rationem, quam cubus numerus ad cubum numerum. Sitque ipſius a. quadratus numerus e. & ex e.in d. fiat g. Aio, quòd g. cubus numerus eſt. Nam per decimam octauam octaui Elementorum, ipſis a d. interſunt duo numeri medij proportionales, qui ſint b c. Sit itaque ipſius b. quadratus ipſe f.& ex b.in f. fiat h.qui cubus erit ipſius b. Oſtendam igitur, quòd g. æqualis eſt ipſi h. hoc modo. Ratio ipſius e. ad ipſum f. per vndecimam octaui, eſt ſicut ratio ipſius a. ad ipſum b. duplicata: quoniam ſcilicet e f. ſunt ipſorum a b. quadrati. Sed ratio b. ad d. eſt rationis a. ad b. duplicata. Igitur, ſicut b. ad d. ſic e. ad f. Quare, per viceſimam ſeptimi, qui fit ex d. in e. hoc eſt, ipſe g. æqualis eſt ei, qui fit ex b. in f.hoc eſt ipſi h. Cubus autem fuit h. ipſius b. ergo & g cubus idem erit. Quod eſt propoſitum.

a	b	c	d
16	24	36	54

e: 256 f: 576

g: 13824

h: 13824

PROPOSITIO 24[a].

Propoſitis duabus quantitatibus cubo tantùm cognitis, eas coniungere: & minorem à maiori ſubtrahere. Sunto propoſitæ magnitudines a b. quarum quadrata a b. & quarum cubi e f. volo eas coniungere per cubos, hoc eſt, comperire cubum totius a b. tanquã vnius magnitudinis. Duco a.in d.& proueniat g. Cui[9] triplum ſit h. Item duco b. in c. & proueniat k. cuius triplum ſit l. Mox aggregatum ipſorũ e f h l. ſit m. Qui, per 21[a] præcedentem, erit cub[9] totius a b. qui quærebatur. Vnde radix cubica ipſius m. erit

a: r.cu.3. b: r.cu.24.

c: r.cu.9. d: r.cu.576.

e: 3 f: 24

g: r.cu.1728. hoc ẽ 12. k: r.cu.216. ẽ. 6.

h: 36 l: 18

m: 81.

erit aggregatum propoſitarum magnitudinum a b. Et nota, quòd ſi cubi, qui cogniti ſupponuntur, ſcilicet e f. fuerint in proportione cuborum numerorum; tunc per corollarium 14[e] huius, ipſæ magnitudines a b. erunt ad inuicem commenſurabiles. Vnde tunc tam g, quàm k. erunt rationales quantitates: quoniam eorum cubi ſunt cubi numeri, per præcedentem: quandoquidem producũtur ex quadratis numerorum e f. in proportione cubica exiſtentium, multiplicatis viciſſim in ipſos numeros e f. Quamobrem cùm g k. tunc ſint rationales, eorum tripli ſcilicet h l. rationales erunt: cumq́ue e f. per hypotheſim ſint rationales, quia cubi cogniti, erit aggregatum ex e f h l. hoc eſt, ipſe m. cubus totius a b. numerus rationalis: quare tota quantitas a b. erit cubo cognita, & vnius nominis, ſicut corollarium 14[e] concludit. Contrà de tota magnitudine a b. cognita per cubum eius m. volo ſubtrahere magnitudinem a. cuius cubus e. idq́ue per cubos, hoc eſt reperire cubum relictæ, qui eſt f. Sit itaque n. qui fit ex a b. tota in a. Quod autem fit ex n. in b. ſit o. cuius triplum ſit r. eritq́ue per antepręmiſſam m. æqualis aggregato ipſorum e f. & r. Itaque ex n. in totam a b. fiat p. & ex m. in a fiat q. Vnde, per primam ſecundi Euclid. p. æqualis erit aggregato ipſarum o q. Aufero igitur ipſum q. ab ipſo p. & ſupererit o. cuius triplum r. iungo cum e. & aggregatum minuo ab ipſo m. & ſupererit f. cubus ſcilicet ipſius b. quæſitus, quæ poſt ipſius a. à tota a b. ſubtractionem relinquitur. Hic rurſum nota, quòd ſi cubi, qui cogniti ſupponuntur, ſcilicet m. & e. fuerint ad inuicem ſicut cubi numeri: tunc per corollarium quartædecimę huius, ipſę magnitudines a b. tota & a. erunt ad inuicem commenſurabiles. Vnde tũc neceſſe eſt, cubos ipſarum p q. magnitudinum, eſſe cubos numeros, & perinde ipſas p q. eſſe rationales: vnde ſequitur, vt earum differentia ſcilicet o. ſit rationalis, eiuſque cubus, numerus cubus. Quod ſic oſtendi poteſt. Cùm m. & e. ſint ad inuicem, ſicut cubi numeri: intererunt ipſis, per decimam octauam, octaui duo medij proportionales, qui ſint r ſ. Sit autem ipſius m. quadratus t. & ipſius e. quadratus x. fiatq́ue ex m. in e. numerus n. qui fuit cubus magnitudinis n. Et ex m. in n. numerum fiat numerus p. qui fuit cubus magnitudinis p. Itemq; ex n. in e. fiat numerus q. qui fuit cubus magnitudinis q. Dico igitur, quòd p. numerus eſt cubus ipſius r. Atque quòd q. numerus eſt cubus ipſius ſ. Nam, cùm m e. numeri ſint ad inuicem, ſicut cubi numeri, & eorum quadrati ſint t. & x. Iam per præcedentem, tam numerus, qui ex e. in t. quàm numerus qui ex m. in x. producitur, Cubus numerus

a: r.cu.3. b: r.cu.24.

e: 3 f: 24

m: 81

n: r.cu.243

o: r.cu.5832. hoc eſt 18.

r: 54

p: r.cu.19683. hoc eſt 27.

q: r.cub.729. hoc eſt 9.

m. 81. { 3. e. { 24. f. { 54. r.

numerus erit: cùm autem m. multiplicãs se ipsum faciat t. & multiplicans ipsum n. faciat e. erit, per primum sexti Elementorum, sicut m. ad e. sic t. ad n. Quare per vigesimam septimi, qui fit ex m. in n. scilicet ipse p. æqualis erit ei, qui ex e. in t. qui cubus fuit. Igitur p. cubus, cuius radix r. Similiter cum e. multiplicans se ipsum faciat x. & multiplicans ipsum m. faciat n. Erit sicut e. ad m. sic x. ad n. Quare, qui fit ex e. in n. scilicet ipse q. æqualis erit ei, qui ex m. in x. qui cubus fuit: Igitur q. cubus erit, cuius radix s. Tam igitur p. quàm q. cubus numerus est. Quod fuerat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Vnde manifestum est, quòd si duo numeri seruantes rationem cuborum, singuli multiplicent suum productum, qui ex inde fient, cubi numeri erunt. Quod corollarium cum præcedenti propositione quàm decentissimè locari poterat in arithmeticis Elementis: vt sicut ibi ostensum est, ex ductu similium planorum generari quadratos, ita constet etiam, qua ratione, quoque ductu ex cubis numeris, cubi quoque numeri nascãtur. Sed hæc ideo adducta sunt, vt regula additionis, & subtractionis radicum cubicarum peculiaris: & respondens regulæ in decimatertia huius de quadratis radicibus traditæ, melius nosceretur. Quam quàm vlterius illa speculari, quæ ab Euclide neglecta sunt, nimis curiosum esset. Itaque ad reliqua transeamus.

PROPOSITIO 25.

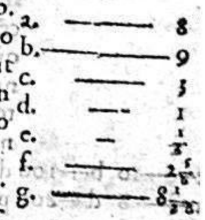
Propositæ cuiuspiam quantitatis radicem quadratam extrahere.

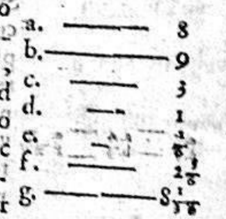
Si numerus repræsentans propositam quantitatem sit numerus quadratus, tunc radix eius numeri erit numerus repræsentans radicem quantitatis propositæ, per secundam huius libelli. Si autem proposita quantitas continet partem, vel partes positæ quantitatis, tunc sit eius numerator a. & denominator b. qui supponantur vel quadrati, vel in ratione quadratorum numerorum: si quadrati, sic capiantur: si in ratione quadratorum numerorum, redigantur ad minimos eiusdem rationis per trigesimã nonam septimi: qui sinnipsi a. b. eruntque per corollarium secundæ octaui, a. b. numeri quadrati. Sint ergo ipsius a. radix ipse c. numerus: & ipsius b. radix ipse d. numerus. Aio igit, quòd quantitas c. d. cui' numerator est c. & denominator d. erit radix quadrata propositæ quantitatis a. b. Quod sic constat.

c. $\frac{2}{3}$ — $\frac{4}{9}$ a.

Quoniam

Quoniam numerus c. est radix numeri a. & numerus d. radix numeri b. palam est, quòd numerus c. in se ductus producit numerum a. & numerus d. in se ductus producit numerum b. Quare per regulam multiplicationis in octaua huius traditam, ex quantitate c. d. in se ipsam multiplicata producitur quantitas a. b. & ideo per diffin. quantitas c. d. radix quadrata est ipsius a. b. propositæ quantitatis: quod erat demonstrandum. Quando autem numeri reputantes propositam quantitatem non fuerint quadrati numeri: tunc talis quantitati radix quadrata non potest numero notari: est enim solum potentia hoc est quadrato rationalis, & per numerum propositum, tanquam quæsitæ radicis quadratum solummodo præfertur. Exempli gratia: Radix 3. vel Radix 5. Poterimus tamen numero magis ac magis vicino ipsam radicem non quadrati numeri significare. Exempli gratia: sit quantitas proposita ipso a. numero non quadrato significata: cuius volo radicem quadratum prope verum inuenire. Capio numerum quadratum b. proxime maiorem ipso a. numero cuius radix sit c. quæ iam erit prima radix propinqua quæsitę, sed, vt propinquiorẽ inueniã, subtrahã a. ab ipso b. & residuum sit d. quod partior per duplũ ipsius c. per nonã huius: & proueniat quãtitas e. quã subtraho ab ipsa c. & supersit f. quod multiplicatum in se facit g. Dico itaq;, quòd f. est radix ipsius a. ppior, quàm c. & ipse g. quadratus vicinior ipsi a. quàm quadratus ipse b. Quod sic patet. Cum c. secetur in e. & f. erit, per quartam secundi elementorum, b. ipsius c. quadratus æqualis his, scilicet quadrato qui ex e. quadrato qui ex f. scilicet g. & duplo eius, quod fit ex e. in f. Et idem quoque b. est æquale ipsi a. vnà cum d. Sed d. est duplum eius, quod fit ex c. hoc est, ex toto e f. in e. igitur b. æqualis erit ipsi a. & duplo eius, quod fit ex e f. in e. Sed duplum eius, quod fit ex e f. in e. est æquale duobus quadratis ipsius e. & duplo eius, quod fit ex e. in f. per tertiam secundi Euclid. bis assumptam. Ergo b. æqualis erit ipsi a. & duobus quadratis ipsius e. & duplo eius, quod fit ex e. in f. fuerat autem & b. æqualis quadrato, quod ex e. & ipsi g. & duplo eius, quod ex e. in f. Igitur quadratum, quod ex e. & ipsum g. & duplum eius, quod ex e. in f. sunt æqualis his, scilicet ipsi a. & duobus quadratis ex e. & duplo eius, quod ex e. in f. Quare, demptis vtrinque quadrato e. & duplo eius, quod ex e. in f. relinquentur inde quidem ipsum g. hinc verò a. vnà cum quadrato ipsius e. inuicem æqualia. Itaque g. excedit ipsam a. in quadrato ipsius e. Et superatur





ab

ab ipso b. quandoquidem f. superatur a b. radix scilicet à radice. Atque ideo f. erit vicinior radici ipsius a. quàm fuerat c. adhuc tamen maior ea: quandoquidem g. maius ipso a. quadratum quadrato. Similiter autem sicut per ipsos b. & c. quadratum & radicem inuenimus f. radicem quæsitę viciniorem quàm fuerat c. Ita rursum per g. & f. quadratum & radicem inueniemus radicem quæsitæ propinquiorem quàm est f. Et similiter, iterum atque iterum viciniorem, semper tamen aliquanto maiorem, donec excessus redigatur ad fractiunculam atomo ęqualem, ac quātouis minorem in infinitum, nunquàm tamen ipsi æqualem: quoniam quęsita irrationalis est, & in terminos numerarios non cadit. quæ omnia exercitio practici exempli calculando facile experieris. Poteris & alia via propinquare radici ignotæ sic. sit a. numerus non quadratus, cuius volo prope verum vestigare radicem: assumo ingentem numerum quadratum, vt puta cētenariū, qui sit b. cuius latus c. Multiplico a. in b. & produco d. Quo fit, vt si a. propositus sit exempli gratia 8. ipse d. proueniat 800. cui radix quidem maior quàm 28. minor, quàm 29. quæ sit e. Et quoniam quadrata sunt in dupla ratione radicum, cum d. numerus sit centuplus ad ipsum a. quadratum, scilicet ad quadratum: iam e. radix ipsius d. erit decupla ad radicem ipsius a. Hoc est, cum d. ad a. sit sicut b. centenarius ad vnitatem: erit e. ad f. sicut b. ad c. vel sicut c. ad vnitatem, hoc est, decuplus. Igitur f. erit decima pars ipsius e. hoc est, maius quàm $2\frac{8}{10}$ minus verò, quàm $2\frac{9}{10}$. & hæc est ipsius a. radix quæsita. Quòd si per centenario assumpsissé quadratum numerum maiorem, vt centies centum, per minutiores partes magis vero appropinquassem. magisque si ad calculum millionem quadratum applicassem. Itaq; deinceps in infinitum, licèt verum numerario termino attingi nullatenus possit.

c — 10 b — 100
a — 8 d — 800
f — $2\frac{8}{10}\frac{9}{10}$ e — 28 29

Propositio 26.

Proposita cuiuspiam quantitatis radicem cubicam extrahere.

Si numerus repræsentans propositam quantitatem, sit numerus cubus, tunc radix cubica eius numeri erit numerus repræsentās propositæ quantitatis radicem, per secūdam huius libelli. Si autem proposita quantitas signetur per duos numeros: tunc sit eius numerator c. & denominator f. qui supponātur vel cubi numeri vel in ratione cuborum numerorum. Si cubi, sic capiantur: si autem in ratione cuborum, redigantur ad minimos eius rationis, per 39 septimi, qui sint ipsi e f. eruntque per corollariū secundæ octaui

$\frac{a.\,2}{d.\,3} = \frac{a.\,4}{b.\,9} = \frac{e.\,8}{f.\,27}$

octaui e f. numeri cubi: sit ergo ipsius e. cubica radix c. numerus, & ipsius f. cubica radix ipse d. numerus. Aio igitur, quòd quantitas c d. cuius numerator c. denominator aūt d. erit radix cubica propositæ quantitatis e f. Quod sic constat. Ducatur c. in se, & fiat a. Item d. in se & fiat b. Eritque per diffin. quantitas a b. quadratum ipsius c d. Cumque ex radicis ductu in suum quadratum proueniat cubus ipsius radicis: iam ex ductu quantitatis c d. in quantitatem a b. proueniet cubus ipsius c d. Sed ex tali ductu quantitatum proueniet quantitas e f. per regulam multiplicationis in octaua huius traditam, quoniam scilicet ex ductu c a. numeratorum fit e. numerator, & ex ductu d b. denominatorū fit f. denominator: igitur e f. quātitas est cubus ipsius c d. quantitatis, & perinde c d. radix cubica ipsius e f. propositæ quantitatis quæsita. Quando autem numeri repræsentantes propositam quantitatem, non fuerint cubi numeri; tunc, sicut in prima propositione dictum est, talis quantitatis cubica radix non erit rationalis, & in numerarios terminos non cadit, nec nisi per cubum profertur, sit radix cubica 7. & ℞. cubica 9. poterimus tamen per numeros magis ac magis ipsi propinquare, sicut in præcedenti pro radice quadrata vestiganda fecimus. Sit enim, exempli gratia, a. quantitas proposita non quidem cubo numero significata, cuius cubicam radicem vestigare iubear, quam non nisi prope, propiusq; tentim accedendo, conijcere possum: sicut in numero non quadrato de quadrata radice faciebam. Sit itaque ipso numero a. proxime superior. b. cubus: cuius radix cubica sit c. Deinde subtraho a. ab ipso b. & residuum sit d. Quod partior per triplum quadrati, quod ex c. & proueniat e. Hoc subtraho ab ipso c. & residuum sit f. cuius cubus esto g. Dico itaque, quòd f. est propinquior radici cubæ ipsius a. quàm erat c. Atque quòd g. cubus est vicinior ipsi a. quàm erat b. Nam, per vigesimam primam huius, cum c. quantitas secetur in ipsas e. & f. erit cubus ipsius c. scilicet ipse b. æqualis his, scilicet cubo ipsius f. qui est g. & cubo ipsius e. & triplo eius quod ex quadrato ipsius e. in f. necnon triplo eius quod ex quadrato ipsius f. in e. Cumque idem b. sit æqualis ipsis a d. simul, atq; d. sit æqualis triplo eius, quod fit ex quadrato ipsius c. in e. & ideo triplo eius, quod fit ex quadrato ipsius e f. in e. propterea b. æqualis erit his, scilicet ipsi a. & triplo eius, quod fit ex quadrato ipsius e f. in e. Sed, per vigesimam

$1\ \frac{2}{3} = \frac{4}{9} = \frac{8}{27}$

a — 7
b — 8
c — 2
d — 1
e — $\frac{1}{12}$
f — $1\frac{11}{12}$
g — $7\frac{71}{1728}$

huius,quod fit ex quadrato ipsius e f.in e.æquale est his, scilicet ei,quod ex quadrato ipsius f. in e. & ei,quod ex quadrato ipsius e.in f.atq; ei,quòd ex quadrato ipsiꝰ e.in totam e f. Igitur triplum eius,quod ex quadrato ipsius e f. in e.æquale erit his,scilicet triplo eius,quod ex quadrato ipsius f. in e.& triplo eius quod ex quadrato ipsius e.in f. atque triplo eius, quod ex quadrato ipsius e. in e f. Quamobrem ipsa b. erit etiam æqualis his.s.ipsi a. & triplo eius,quod ex quadrato ipsius f.in e. & triplo eius,quod ex ipsius e.quadrato in f. atq; triplo eius,quod ex quadrato ipsius e.in e f. Verùm,per 21ᵃ huius,idem b. cubus æqualis est his,scilicet ipsi g. qui cubus est ipsius f.& cubo ipsius e.& triplo eius,quod fit ex quadrato ipsius e.in f.triploque eius,quod ex quadrato ipsius f.in e. Quoniam scilicet e. & f. constituunt ipsam c.radicem ipsius b. Ergo hęc, scilicet ipsa a. triplum eius, quod ex quadrato ipsius f.in e.& triplum eius, quod ex quadrato ipsius e. in f. cũ triplo eius, quod ex quadrato ipsius e. in e f. simul erunt æqualia his simul,scilicet ipsi g. cubo ipsiꝰ f.& cubo ipsius e. & triplo eius,quod ex quadrato e.in f.& triplo eius,quod ex quadrato ipsius f.in e. Demptis igitur vtrinque his, scilicet triplo eius,quod ex quadrato ipsiꝰ e.in f. & triplo eius quod fit ex quadrato ipsius f.in e.supererunt g.& cubus ipsius e.simul æqualia ipsi a. & triplo eius,quod ex quadrato ipsius e. in e f. Itaque g. tanto maior est ipso a. quanto triplum eius quod ex quadrato ipsius e.in e f. siue in c.maius est cubo ipsius e. Maius est enim id, quod ex quadrato ipsius e. in e f. quàm cubus ipsiꝰ e.qui ex quadrato ipsius e.in ipsum e.producitur.Multo magis ergo & triplum eius,quod ex quadrato ipsius e.in e f.seu in c.maius erit cubo ipsius e.Cùm igitur g.sit maior ipso a.minor autem ipso b.quandoquidem f.minor fuit ipsa c. radix radice. erit f. propinquior cubicæ radici ipsius a.quàm fuerat c Adhuc tamẽ f.maior est ipsa quæsita radice cubica ipsius a.quandoquidẽ g.cubus maior, q̃ a. Similiter autem,sicut per b.& c. inuenimus f. radicem viciniorem radici ipsius a.quàm fuerat c.ita rursus per g.& f.inueniemus radicem propiorem radici ipsius a. quàm fuit f.& similiter iterũ,atq; iterũ propinquiorẽ,nũquã tñ in infinitũ punctuale verũ,numerario termino attingẽtes. Quin etiã id ipsum,sicut in quadrata fecimꝰ,aliter attẽtabimus sic: Sit a. numerus nõ cubus, cuius velim coniectare cubam radicem. Assumo cubum numerum magnũ,vtputa millenarium,qui sit

a — 7
b — 8
c — 2
d — 1
e — $\frac{1}{12}$
f — $1\frac{11}{12}$
g — $7\frac{71}{1728}$

c — 10 b — 1000
a — 7 d — 7000
f — $\frac{9}{10}$ e — 19

sit b. cuius radix cubica scilicet denarius sit c. Multiplico ipsum a.in b. & produco d. Quo fit, vt si a. propositus numerus sit 7. iam ipsum productũ d.sit 7000. Cuius radix cubica quidẽ paulò maior est, quàm 19. quæ sit e. & quoniam cubi sunt ad inuicẽ in tripla ratione radicum; propterea cũ d.numerus sit millecuplꝰ ad ipsum a. cubꝰ scilicet ad cubũ: iã e. radix ipsius d.decupla erit ad radicem ipsius a.igitur radix ipsius a. quæ sit f.erit pars decima ipsius e.hoc est, paulò maior,quàm $1\frac{9}{10}$ Quòd si pro millenario assumpsissem cubum maiorem, vtputa millionẽ, vicinior verò fuissem.Itaq; deinceps:nã maior numerus distinctus partes exprimit.quia numerosior:neq; aliter geometrico pũcto accedere licet propter incommensurabilitatem quęsitæ radicis,in nullum numerum cadentis. Hæc de radicum quadratarum, & cubicarũ extractione satis.Nunc ad progressiones veniamus. Nam quemadmodũ datæ quãtitatis quadrata vel cubica radix via giometrica extrahatur in libello Datorũ Theonis docuimus. Illius regulam Euclides in vltima secundi: Huius verò præceptum Philon Byzantius, Apollonius, Archytas, Pappus, Eratosthenes, Menæchmus & alij tradidere: vt Eutotius Ascalonita in commentarijs Archimedis scripsit.

c — 10 b — 1000
a — 7 d — 7000
f — $1\frac{9}{10}$ e — 19

PROPOSITIO 27ᵃ.

Cùm fuerint quotcunque quantitates per idem crementum seriatim crescentes, ex dimidio numeri ipsarum in congeriem ex prima & vltima multiplicato producitur aggregatum ipsarum omnium. Exempli gratia, sint quinque magnitudines, a b c d e. seriatim & eodem accessu crescentes: sitq; a. minima e.verò maxima. Dico, quòd si dimidium quinarij ducatur in congeriem ipsarum a e producetur aggregatum ipsarum a b c d e. Ponatur enim totidem magnitudines & singulæ singulis ipsis a b c d e. æquales f g h k l. sed ordine præpostero dispositæ: sic enim fiet, vt, cremento vnius ordinis decrementum alterius repensante,binarum quarumuis vna sit congeries: Vnde vtriusque ordinis aggregatum planus numerus erit sub duobus lateribus contentus: quorum vnũ erit numerus combinationum, scilicet quinarius, alter verò congeries ipsa binarum. Talis autem congeries constat ex minima & maxima.Igitur quinarius in talem congeriem ductus,producet aggregatum vtriusq; ordinis. Quare & dimidium quinarij in eandem congeriem multiplicatum producet aggregatum vnius ordinis. Quod fuit demonstrandũ.

3 a — l 11
5 b — k 9
7 c — h 7
9 d — g 5
11 e — f 3

5 — 14 — 70
$2\frac{1}{2}$ — 14 — 35

PROPOSITIO 28a.

Radicum ab vnitate per ordinem dispositarum, vltima in succedentem multiplicata, producit numerum, cuius dimidium est aggregatum ipsarum radicum omnium. Nam per septimam præcedentis libri tale productum est duplum trianguli collateralis vltimę radicis: triangulus autem est, per diffin. aggregatum omnium radicum vsque ad vltimam inclusiue. Cum ergo dimidium talis producti sit ęquale triangulo, erit & æquale aggregato radicum: Quod est propositum.

PROPOSITIO 29a.

a — 1
b — 3
c — 5
d — 7
e — 9
25

Numerus multitudinis imparium ab vnitate dispositorum in se ductus, producit aggregatum ipsorum imparium omnium. Exempli gratia, sint quinque impares a b c d e. ab vnitate dispositi: dico, quòd quoniam quinque sunt, quinarius in se ductus producit aggregatum ipsorum quinq; imparium. Nam, per quintamdecimam præcedentis libri, quinq; dicti impares aggregati conficiunt quintum numerum quadratum, qui ex quinario in se ducto producitur. Verum est ergo propositum in omni casu.

PROPOSITIO 30a.

a — 2
b — 4
c — 6
d — 8
e — 10
f — 5
g — 6
h — 30

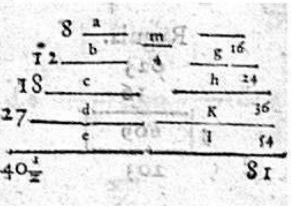
Numerus multitudinis parium à binario successiue dispositorum, multiplicatus in numerum vnitate maiorem, producit aggregatum ipsorum parium omnium. Exempli gratia, sunto quinq; pares a b c d e. à binario per ordinem dispositi. f. autem sit quinarius numerus ipsorum. g autem numerus vnitate maior, scilicet senarius, & ex f. in g. fiat h. Aio, quòd h. est aggregatum ipsorum a b c d e. parium. Quod sic patet. palam est, quòd in tali exemplo f. est quinta radix; & g. sexta radix: Igitur, per septimam præcedentis libri h. talium radicum productum est numerus parte altera longior sextus: qui per octogesimam quintam dicti libri, est aggregatum ipsius e. paris sexti loci, & omnium præcedentium: quod erat demonstrãdum. Et similiter in oĩ casu constabit propositũ.

PROPOSITIO 31a.

Si in vno ordine fuerint quotlibet quantitates continue proportionales, & in secundo ordine quantitates vna plures in eadem ratione continue proportionales, ita vt earum differentiæ sint quantitatibus primi ordinis singulæ singulis æquales: tunc differentia primæ & postremæ secundi ordinis æqualis erit aggregato quantitatum primi ordinis. Ponantur in primo ordine quantitates continuæ proportionales quot-

uis,

uis, vtputa quatuor a b c d. quib9 succedat in eadẽ pportione ipsa e. qnta. Deinde in secũdo ordine vnà plures quãtitates. s. quinq; f g h k l. ita cõparatæ, vt dfa ipsarũ f g. sit æqualis ipsi a. Et differentia ipsarũ g h. æqualis ipsi b. & dfa ipsarũ g k. æqualis ipsi c. & differentia ipsarum k l. æqualis ipsi d. Tunc aio, ꝙ differentia ipsarum f l. erit æqualis aggregato ipsarũ a b c d. Patet propositũ: qm̃ differentia ipsarũ f l. extremarũ conficitur ex differentijs quatuor medijs: quæ per hypotesim sunt æquales ipsis quatuor a b c d. quantitatibus. Sed suppositis magnitudinib9 primi ordinis: sic inueniẽtur magnitudines secundi ordinis. Sit ipsarũ a b. differentia m. & sicut est m. ad ipsam a. sic sit a. ad f. & sicut est a. ad e. sic sit f. ad l. Vnde sicut ipsis a e. intersunt tres mediæ proportionales: ita & ipsis f l. totidem mediæ proportionales in eadem proportione intererunt. quæ sint g h k. Et, quoniam pp similem proportionem, sicut est a. ad f. sic est differentia ipsarum a b. scilicet m. ad differentiam ipsarũ f g. fuitq; & m. ad a. sicut a. ad f. ideo m. eandem habebit rationem ad a. & ad differentiam ipsarum f g. æqualis ergo est a. differentiæ ipsarũ f g. Sed cum differentiæ seruent continuatam magnitudinũ proportionẽ, propterea tam b. dfæ ipsarũ g h. q̃ c. differentiæ ipsarum h k. q̃ d. differentiæ ipsarũ k l. ęqualis erit. Hinc oritur regula progressionis magnitudinũ continue proportionalium. Nam ex m. & a. iam notis, notescit f. deinde ex a. e. & f. nota venit l. cuius & ipsius f. excessus est aggregatum ipsarum a b c d. sicut ostensum est.



PROPOSITIO 32a.

1
2 . 5
4 . 10 . 25
8 . 20 . 50 . 125
16 . 40 . 100 . 250 . 625.

Si secundũ duos terminos summantur quotlibet quãtitates cõtinue proportionales, quarũ extrema multiplicẽt ipsi termini: tũc productorũ differentia diuisa inter minorũ differẽtiã, exhibet aggregatũ ipsarum quantitatum. Sunto duo termini, gratia exẽpli, numeri 2. & 5. quorum quadrati 4. & 25. cubi autem 8. & 125. secundi quadrati 16. & 625. quadratis autem intersit medius proportionalis 10. cubis duo medij proportionales 20. & 50. secundis quadratis tres medij proportionales 40. 100. 250. qui singuli producuntur ex ductu terminorum in se, & ad inuicem, & inde in singulos secundi, & tertij ordinis numeros, vt assolet multiplicatorum. In horum tertio ordine sunt quatuor numeri continue proportionales scilicet 8. 20. 50. 125. in quorum extremos 8. & 125. multiplicati termini 2. & 5. producunt 16. & 625.

1
2 . 5
4 . 10 . 25
8 . 20 . 50 . 125
16. 40. 100. 250. 625

Regula.
625
16
3 | 609 |
203

quorum differentia eſt 609. Aio, quòd huiuſmodi differentia diuiſa in differentiam ipſorum 2.& 5. hoc eſt, in 3. exhibet aggregatum dictorum quatuor numerorum continue proportionalium, ſcilicet 8. 20. 50. 125. quod ſic oſtenditur. Quoniam 2. ductus in ſe, facit 4. ductus in 5. facit 10. Iam idem 2 in 3. quę differentia eſt ipſorum 2.& 5. producet differentiam ipſorum 4.& 10. productorum : quoniam multiplicator ductus in differentiam multiplicatorum, producit differentiam productorum. Item quoniam 5. in 2. facit 10.& in ſe facit 25. iam & idem 5. in 3. faciet differentim ipſorum 10.& 25. Simili ratione, quoniam 2. in 4. facit 8. & 5. in 4. facit 20. (propter proportionalitatem numerorum) ideo 4. in differẽtiam dictam ipſorum 2.& 5. ſcilicet in 3. faciet differentiam ipſorum 8. & 20. Non aliter deinceps oſtendam, ꝙ dicta terminorum 2.& 5. differentia multiplicata in 10. facit differẽtiam ipſorum 20.& 50. multiplicata quoq; in 25. facit differentiam ipſorum 50. & 125. Quamobrẽ eadẽ terminorum differentia multiplicata in aggregatũ ipſorum 4. 10. 25. faciet aggregatum trium differentiarũ dictarũ, ſcilicet ipſorum 8. & 20. ipſorum 20.& 50. ipſorum 50. & 125. Sed tres tales differentiæ coniunctæ componunt extremorum 8. & 125. differentiam, igitur dicta terminorũ differentia multiplicata in aggregatum ipſorum 4. 10. 25. producet differentiam ipſorum 8.& 125. extremorum . Quare & talis extremorum 8. & 125. (quæ ſunt producta ex terminis in 4. & 25. multiplicatis) differentia diuiſa in terminorum differentiam, exhibebit dictum ipſorum 4. 10. 25. continue proportionalium aggregatum : ſicut propoſitio concludit. Adhuc per eadem omnino demonſtrabimus, quòd ipſa terminorũ differentia multiplicata in ſingulos 8. 20. 50. 125. tertij ordinis numeros, producet ſingulas quatuor ſequentis ordinis numerorũ differẽtias: & pinde eadẽ terminorũ dr̃a ml̃cata in aggregatũ ipſorum 8. 20. 50. 125. producet aggregatũ dictarum quatuor differentiarũ ſequentis ordinis: & ideo producet dr̃am duorũ extremorũ 16.& 625. quæ ſunt producta ex ductu terminorum 2. & 5. in ipſos 8. & 125. extremos quatuor continue proportionaliũ. Vnde & taliũ productorũ differentia diuiſa in differẽtiam terminorũ, exhibebit aggregatũ ipſorum 8. 20. 50. 125. quatuor continue proportionaliũ numerorũ : quod erat demonſtrandũ. Similiter pro cæteris terminis, aut proportionibus oſtẽdam qđ proponitur.

1
3 . 7
9. 21. 49
27. 63. 147. 343
81. 189. 341. 1209. 240

Regula
2401
81
4 | 2320
580

Pro-

Propositio 33ᵃ.

Sicut eſt quadratus ad duplum ſuæ radicis, ſic eſt collateralis Triangulus numerus ad ſequentem radicem. Exempli gratia, ſit a. quinta radix b. autem quintus quadratus numerus: & ipſius a. duplus ipſe c. Item d. ſexta radix. cumque a. in ſe faciat ipſum b. Item a. in ſequentem radicem d. faciet ipſum e. per diffin. parte altera longiorem ſexti loci. Cuius dimidiꝰ ſit f. qui per octauam præcedentis libri, erit triangulus quintus. Demonſtrandum eſt ergo, quòd ſicut eſt b. ad ipſum c. ſic eſt f. ad ipſum d. Sic, quoniam a. multiplicans ipſos a. d. producit ipſos b. e. Iam ideo, per primam ſexti Euclidis, erit ſicut a. ad ipſum d. ſic b. ad ipſum e. & permutatim ſic b. ad a. ſicut e. ad d. Cumq; a. ſit dimidius ipſius c. atque e. dimidius ipſius f. iam, per 23ᵃ quinti Elementorum, erit ex æquali, ſicut b ad c. hoc eſt, quadratus quintus ad ſuam radicem, f. triangulus quintus, ad d. ſextam radicem : quod fuit demonſtrandum. & ſicut pro quinto loco, ita pro quocunque conſtabit propoſitum.

c. 10. —— a. 5. — b. 25
a. 5
d. 6 —— e. 30. —— f. 15

Propositio 34ᵃ.

Omnis triãgulus multiplicatus in duplum collateralis radicis, producit aggregatum ex cubo & quadrato collateralibus. Repetita deſcriptione pręmiſſæ, oſtendendum eſt, quòd f. triangulus quintus multiplicatus in c. duplum ipſius a. radicis quintæ, producit cubi & quadrati quintorum congeriem, hoc modo. Sicut eſt b. quadratus quintus ad c. duplum ſuæ radicis a. ſic eſt f. triangulus quintus ad d. ſequentem radicẽ, per præcedentem. Cùm verò a. in b. per diffin. faciat cubum quintum: Iam d. vnitate maior, quàm a. in b. faciet congeriem ex cubo tali ſuoque quadrato. Sed per 15ᵃ ſexti, quod fit ex d. in b. ęquum eſt ei, quod fit ex f. in c. ſiue per 23ᵃ ſeptimi. Igitur f. in c. faciet dictam cubi, quadratique congeriem, quod erat demonſtrandum. Et ſicut in quinto, ita in quouis loco conſtabit propoſitum.

Propositio 35ᵃ.

Quod fit ex aggregato quotlibet radicum ab vnitate, ordinatarum multiplicato in duplum radicis vltimæ, ſi iungatur cum ipſo radicum aggregato, cõſtabit triplum aggregati omnium quadratorum ex dictis radicibus ſingulis factorum. Nam cum aggregatum, exempli gratia, quinque radicum ab vnitate ordinatarum ſit per diffin. quintus triangulus : & aggregatum quinq; quadratorum talium radicũ, ſit quinta pyramis quadrata.

1.	1.
2.	4.
3.	9.
4.	16.
5.	25.
15	55

$\left.\begin{matrix}5\\5\end{matrix}\right\}10\quad\left.\begin{matrix}15\\10\end{matrix}\right\}150-\left\{\begin{matrix}125\\25\end{matrix}\right.$

3 } 15/165 15/195
55

quadrata per diffin. Iam demonstrandum erit, quòd illud, quod fit ex quinto triangulo in duplum radicis quintę, si iungatur cum ipso triangulo, conflabit triplum pyramidis quadratæ quintæ. Sed, per præcedentem, id, quod fit ex quinto triangulo, in duplum radicis quintæ, æquum est aggregato cubi & quadrati quintorum. igitur demonstrandum erit, quòd congeries cubi quadrati & trianguli quintorum, æquiualet triplum pyramidis quadratæ quintæ. Quod cum iam ostensum sit in 63ª prę̨cedentis libri: iam constat propositum. ita non solum in quinto, sed in quouis alio loco demonstrabitur, quod demonstrandum proponitur.

COROLLARIVM.

Hinc regula progressionis quadratorum ex radicibus ordinatis factorum constat. Quòd si numeri progressionis propositæ sint ad radices singulis singulas dupli, tunc quadratorum quæsitorum summa, ad quadratorum radicum congeriem erit quadrupla: si tripli, nonupla; si quadrupli, sedecupla; si quincupli vigecupla quincupla, & ita deinceps: nam quadratorum ratio duplex est ad laterum rationem.

PROPOSITIO 36ª.

Si fuerint quotlibet ab vnitate ordinatè radices: quod fit ex aggregato postremæ & sequentis radicum in productum ex eisdem, duplum semper est ad congeriem ex cubo quadrato, & triãgulo collateralibus postremæ: & perinde sexcuplum pyramidis quadratæ collateralis, hoc est aggregati quadratorum ex radicibus ordinatis productorum. Sint, exempli gratia, quatuor ab vnitate radices, quarum vltª sit a. eiº quadratus b. Dimidium multitudinis radicum sit c. Radix sequens, hoc est, quinta sit d. fiatque ex b. in d. numerus e. & ex d. in c. numerus f. Palam est, quòd e. est aggregatum ex cubo ipsius a. & ex quadrato eius, hoc est, ex b. quandoquidem d. multiplicator est vnitate maior quàm a. quodq; per 28ª huius f. est triangulus quartus, aggregatumque quatuor radicum. Deinde g. sit aggregatum ipsarum a. d. radicum: & h. sit productum ex earundem a. d. multiplicatione, fiatque inde ex g. in h. numerus k. & sic demonstrandum erit, quòd numerus k. est duplum ad aggregatum ex e f. Quod sic patet. Numerus g. constat ex a. & d. & ideo constat ex duplo ipsius a. & ex vnitate. & numerus h. constat ex a. & b. per nonam præcedentis libri: quoniam h. est parte altera longior quinti loci: Et b. est quartus quadratº cuius radix a. Igitur ex a. in a b. fiet e. & ex duplo ipsius a. in h.

c. 2 } f. 10
d. 5 } e. 80
a. 4 } b. 16
a. 4

g. 9 } k. 180.
h. 20

in h. fiet duplum ipsius e. Sed ex vnitate in h. fit duplum ipsius f. igitur ex aggregato dupli ipsius a. & vnitatis, hoc est ex g. in h. fiet duplũ totius e f. quod erat demonstrandũ. Quòd enim productũ ex vnitate in h. hoc est ipse h. sit duplũ ipsius f. palã est: Nam f. fit ex c. in d. At ipse h. fit ex a. in d. qui duplus est ipsius c. quoniam scilicet a. est multitudo radicum & c. dimidium talis multitudinis. Cõstat ergo propositum. Sed e f. per pręmissam, est triplum aggregati quadratorum à quatuor radicibus propositis factorum: Ergo k. qui fit ex g. in h. sexcuplus erit aggregati quadratorum, sicut propositio concludit. Quod autem pro quatuor radicibus conclusum est, pro quotcunque propositis in infinitum, demonstrabitur.

COROLLARIVM.

Hinc altera regula elicitur ad habendum cumulum quadratorum à quotcunque ab vnitate ordinatis radicibus factorum. Quod si pro radicibus proponãtur aliæ quantitates secundùm primæ crementum ordinatæ, tunc proportio earum singularum ad singulas radices duplicanda est. & secũdum talem proportionem adaugenda, vel diminuenda erit summa radicum, vt proueniat summa quadratorum propositarum quantitatum.

PROPOSITIO 37ª.

Propositis ab vnitate quotlibet radicibus, si radix proxime sequens multiplicet aggregatum ex quadrato postremæ & ex dimidio ipsius postremæ; producetur triplum summæ quadratorum ipsarum radicum propositarum. Exempli gratia, sunto radices octo dispositæ ab vnitate singulę cum suis quadratis. Radix proxime sequens erit 9. aggregatum ex quadraro postremæ, scilicet 64. & ex dimidio ipsius postremæ scilicet 4. erit 68. Aio igitur, quòd si 9. ducatur in 68. producetur triplum summę talium quadratorum omnium scilicet 612. Quod sic patet. Per 36ª secundi horum arithmeticorum, ex aggregato ipsorum 8. & 9. hoc est postremæ propositarum, & sequentis proxime radicis, hoc est ex 17. in productum earundem scilicet 72. fit sexcuplum summæ dictorum quadratorum. Igitur ex $8\frac{1}{2}$ quod est dimidium dicti aggregati, *612. triplum ad 204. quæ* in 72. fiet triplũ talis summæ. Sed sicut 72. ad 9. sic 68. ad $8\frac{1}{2}$ *est summa quadratorum.* quare, per vigesimam septimi Elementorũ, quòd fit ex 72. in $8\frac{1}{2}$ æquale

1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	4 / 68

7 —— 9. 64 —— $8\frac{1}{2}$

612

612

quod per 36^a secundi fuit triplum summæ quadratorum dictæ.

$8\frac{1}{2}$ æquale erit ei, quod ex 9. in 68. Igitur ex 9. in 68. fiet tripsum dictæ summæ quadratorum : quod erat demonstrandum. Quòd autem 72. ad 9. sit sicut 68. ad $8\frac{1}{2}$ patet. nam 72. ad 9. est octuplus ex diffin. multiplicationis, atque 68. ad $8\frac{1}{2}$ similiter octuplus : constat enim 68. ex duobus, scilicet 64. quadrato, & ex dimidio suæ radicis, scilicet 4. estq; 64. octuplus ad 8. suam radicem, & totuplus etiam quatuor dimidius eiusdem radicis ad $\frac{1}{2}$. Quare totum 68. ad totum $8\frac{1}{2}$ similiter octuplum. Constat ergo propositum. quod sicut de octo, ita de quotcunque propositis radicibus similiter ostendemus.

PROPOSITIO 38.

Quod fit ex aggregato quotlibet radicum ab vnitate ordinatarum in se ipsum multiplicato, æquale est aggregato omnium Cuborum à singulis radicibus factorum. Nam per diffin. aggregatum radicum ab vnitate ordinatarum, est triangulus numerus postremę radicum. Sed triangulus talis in se ductus, producit aggregatum cuborum omnium radicum vsque ad postremam inclusiue, per 58^a præcedentis libri. Igitur & aggregatum ipsum radicum in sese multiplicatum producit eorundem cuborum aggregatum. quod erat demonstrandũ.

1 —— 1
2 —— 8
3 —— 27
4 —— 64
5 —— 125
15 225

COROLLARIVM.

Vnde manifesta fit regula progressionis cuborum. Et hìc, sicut in quadratis, notandum, quòd si pro radicibus proponantur aliæ quantitates secundum primę crementum in ordinem continuatæ : tunc proportio earum singularum, ad singulas radices triplicanda est: & secundùm talem proportionem adaugenda erit, vel minoranda summa cuborum à radicibus factorum, vt proueniat summa cuborum propositarum quantitatum.

COROLLARIVM.

Item huc spectat quidquid de pyramidibus in præcedenti libro conclusum est. Nam pyramis triangula est congeries triangulorum : quadrata, quadratorum : pentagona, pentagonorum ; hexagona hexagonorum, & deinceps ab vnitate ordinatorum. Vnde totidẽ progressionũ regulæ propagãtur.

PROPO

PROPOSITIO 39^a.

Duas propositas rationes coniungere. Sunto duę rationes, vna per duos numeros a b. & altera per duos numeros c d. significata, oportet eas coniungere : hoc est, rationem ex ipsis duabus composita inuenire. Hoc fiet per multiplicationem terminorum vnius in terminos alterius sic: Ducatur a. in c. & fiat e. Ducatur b. in d. fiat g. Dico igitur, quòd ratio e. ad g. est aggregatum rationum a. ad b. & c. ad d. hoc est, quòd ratio e. ad g. componitur ex rationem a. ad b. & ex ratione c. ad d. Quod sic ostenditur. Ex a. in d. fiat f. & tunc, quoniam a. multiplicans ipsas c d. facit ipsas e f. erit per primam sexti, sicut c. ad d. sic e. ad f. Item, quia d. multiplicans ipsas a b. producit ipsas f g. erit sicut a. ad b. sic f. ad g. Sed ratio e. ad g. componitur ex rationibus e. ad f. & ipsius f. ad g. igitur eadem ratio e. ad g. componetur ex nominibus æqualibus, scilicet a. ad b. & c. ad d. Quod erat demonstrandum.

a. 3 —— c. 5 —— e. 15
b. 2 —— d. 4 —— g. 8
f —— 12

e. c.
f. d. a
g. b

COROLLARIVM.

Non aliter tres, aut plures rationes in vnam colligentur.

PROPOSITIO 40^a.

Duarũ rationum propositarum alterã ab altera subtrahere. Sunto duæ rationes a. ad b. & c. ad d. oportet subtrahere hanc ab illa. Hoc fiet per multiplicationem terminorum ordine permutato, sic: Ducatur d. in a. & fiat e. Ducatur c. in b. & fiat f. Dico ergo, ratio e. ad f. est, quæ restat post subtractionem rationis c. ad d. à ratione ipsius a. ad b. Quod sic ostenditur. Ex c. in a. fiat g. & tunc, quia c. multiplicans ipsos a b. facit g f. erit, sicut a. ad b. sic g. ad f. & quoniam a. multiplicans ipsos c d. faciunt ipsos g e. erit sicut c. ad d. sic iam g. ad e. Sed ratio g. ad f. componitur ex ratione g. ad e. & ex ratione e. ad f. ergo ratio a. ad b. componitur ex ijsdem : fuit autem sicut c. ad d. sic g. ad e. Igitur ratio a. ad b. componetur ex rationibus c. ad d. & e. ad f. Quare, ablata ratione c. ad d. à ratione a. ad b. supererit ratio e. ad f. quod erat demonstrandum.

g. a. c
e. . . . d
f. b.

PROPOSITIO 41^a.

Datam rationẽ toties, quoties quis proponat, multiplicare. Si data ratio duplicanda sit: per antepręmissam, iungatur

3 — 3 — 9 — 27 — 81
2 — 2 — 4 — 8 — 16

bis

		1		
	3.	2		
	9.	6.	4	
27.	18.	12.	8	
81	54.	36.	24.	16.

bis ipſamet ſibi, ſi triplicãda, duplatæ iam iungatur iterum: ſi quadruplicanda, triplatę iungatur iterum: itaque deinceps. Ita enim intelligitur multiplicari ratio, vt bis, ter, quaterve continuetur in terminis. Vnde quadratorum ratio dupla: cuborum tripla; ſecundorum quadratorum quadrupla ad laterum ſiue radicum rationem.

COROLLARIVM.

Igit rationis duplatæ terminis vn⁹ intererit medi⁹ proportionalis: Triplatæ, duo; Quadruplatæ, tres: itaque deinceps.

PROPOSITIO 42ᵃ.

Datam rationem bifariã, ſiue trifariam, ſiue quadrifariã, ſiue plurifariam, vtcunque quiſpiam poſtulauerit, æqualiter partiri.

a — 1
b —— 2
c ——— 4
d ———— 8
e ————— 16

Sint datæ rationis termini a c. ſi oporteat rationem a. ad c. bifariam partiri, interponatur eis media proportionalis b. Si autem datæ rationis termini ſint a d. & oporteat ipſam trifariam diuidere, tũc interponãtur eis duæ mediæ proportionales b c. Si verò datę rationis termini ſint a e. & oporteat ipſam quadrifariam partiri: tunc interponantur eis tres mediæ proportionales quantitates b c d. Cuius problematis practica executio, quamuis à nobis in Arithmeticis quæſtionibus ſit abundè tradita, hîc tamen ab exemplis non abſtinebimus. Et in primis notandum, quòd quando propoſitæ quantitates ſunt adinuicem ſicut quadrati numeri: tũc vna quantitas interiacet illis media proportionalis: quando autem, ſicut cubi numeri, tunc duæ mediæ. Quando verò ſicut quadrati quadratorum, tunc tres mediæ. Quando demum, ſicut quadrati cuborum, tũc quinque mediæ proportionales quantitates propoſitis interiacent: & in omni tali caſu tales quantitates continuè proportionales ſunt adinuicẽ cõmẽſurabiles; quippe quæ inter ſe in ratione numerorũ: vnde & rationes ipſæ tunc ſunt rationales, hoc eſt, per numeros expreſſæ, atq; ideo propoſita ratio tunc ſecatur in rationes cognitas per numeros. Si verò propoſitæ quantitates ſecus, quàm dictum eſt, ad inuicem ſe habeant: interpoſitæ proportionales mediæ rationales non erunt. Exempli gratia, proponantur mihi duo numeri 8. & 18. quibus iubeor medium proportionalem inuenire, quoniam tales numeri ſe habent adinuicem, ſicut 4. & 9. quadrati numeri, quibus interiacet medius proportionalis b. Ideo & propoſitis vnus ſimiliter medius intererit proportionalis 12. duplum ad illum medium, ſicut propoſiti ad quadratos dupli ſunt. Item

Exempla rationalium.

8.	4	16.	8
12.	6	24.	12
18.	9	36.	18
		54.	27
3.	1	3.	1
6.	2	6.	2
12.	4	12.	4
24.	8	24.	8
48.	16	48.	16
		96.	32
		192.	64

Item ſi iubear ipſis 16. & 54. duos proportionales interponere: quoniam tales numeri ſunt ad inuicẽ, ſicut 8. & 27. cubi numeri, quibus interiacent duo medij proportionales, ſcilicet 12. & 18. iam ideo & propoſitis totidẽ medij proportionales interiacebũt ſcilicet 24. & 36. Item, ſi ipſis 3. & 48. tres medios proportionales accõmodare velim, nõ minus licebit: cum ſint ſicut 1. & 16. quadrati ſecundi quibus tres 2.4.8. medij interſunt: eruntq; inter ꝓpoſitos medij 6.12.24. Adhuc, ſi his numeris 3. & 192. lubet intercludere quinque medios proportionales poſſibile erit: quãdoquidẽ tales ſunt in proportione ipſorum 1. & 64. qui ſunt quadrati cuborũ, quibus nemo neſcit quinq; numeros intereſſe proportionales ſcilicet 2.4.8.16.32. Vnde & propoſitis intererunt totidẽ ſcilicet 6.12.24.48.96. Quod ſi propoſiti numeri aliter, ꝙ dictũ eſt, adinuicem ſe habeant, non intererunt ipſis, quos diximus, numeri proportionales: ſed quãtitates irrationales. Exempli cauſa, proponantur duo numeri nullã dictarũ proportionum ad inuicem ſeruantes, vtpote 2. & 3. Iã his nullatenus medij proportionales, quos diximus, intererunt; ſed quædã irrationales quantitates. Itaque ſi velim ipſis 2. & 3. mediã includere proportionalẽ, agã per eorũ quadratos 4. & 9. quib⁹ intereſt 6. qui quadratus erit mediæ quæſitæ, quæ iam potentia tantũ noteſcit. Nam ſicut tres quadrati 4.6.9. ſunt continuè proportionales, ita & eorum radices ſcilicet r. 4. r. 6. r. 9. ſunt continuè proportionales. Si autem iiſdem numeris velim duas medias proportionales inſerere, aſſumam eorum cubos 8. & 27. quorum medij duo ſunt 12. & 18. qui cubi ſunt duarum quas quærimus mediarum: Nam radices cuborum proportionalium ſunt & proportionales. Si vero, iiſdem tres medias interponere iubear, exponam eorum ſecundos quadratos, ſcilicet 16. & 81. quorum tres numeri medij ſunt, ſcilicet 24. 36. 54. qui ſecundi quoque quadrati erunt quantitatum trium mediarum, quas quærimus: Et quoniam horum numerorum medius quadratus numerus eſt, iam media trium quantitatum non ſolum ſecundo quadrato ſed etiam primo noteſcit: eritque ipſa r. 6. Si demum, ipſis 2. & 3. quinq; medis proportionales procurem, eliciam ex ipſis quadratos cuborum, ſiue cubos quadratorũ, qui ſunt 64. & 729. Quibus interponi põt quinq; numeri ꝓportionaliter. ſ. 96. 144. 216. 324. 486. q ſimiliter erũt quadrati cuborũ quinq; mediarũ, quas

Exempla Irrationalium.

r. 4.	2
r. 6.	r. 6
r. 9.	3
r. cu. 8	. . 2
r. cu. 12.	r. cu. 12
r. cu. 18	r. cu. 18
r. cu. 27	. . 3
r r. 16.	2
r r. 24.	r r. 24
r r. 36.	r. 6
r r. 54.	r r. 54
r r. 81.	. . 3
r.□.r.cu.64	 2
r.□ r.cu.96	r.□.r.cu.96
r.□.r.cu.144	r cu. 12.
r.□.r.cu.216	r.□.16.
r.□.r.cu.324	r.cu.18.
r.□.r.cu.486	r.□.r.cu.
r.□.r.cu.729	. . . 3 . .

quas quærimus, quantitatum. Et quoniam horum medius habet cubam radicem, scilicet b. iam media quantitas erit radix quadrata b. Item, quoniam huius medij collaterales sunt quadrati numeri, quorum radices quadratæ sunt 12.& 18. idcirco & mediæ quantitatis collaterales, erunt radices cubæ numerorum 12. & 18. Sed hæc omnia non solùm ex elementis Euclidis demõstrãtur, verumetiam in triuialibus ludis practico cuilibet sunt notissima. Quatenus tamen problematis qualitas & locus exigebat, hæc à nobis inducta sunt.

COROLLARIA.

Ex quibus quidem manifestum, quòd in quantitatibus continue proportionalibus, si prima & secunda fuerint rationales, tunc sequentes in eadem proportione continuatæ semper in infinitum rationales erunt. Si autem prima & tertia tantùm rationales fuerint tunc quinta, septima & singulis semper intermissis, sequentes rationales erunt: intermissæ verò omnes potentia tãtùm expressę. Si verò prima & quarta rationales duntaxat esse contigerit: tunc septima, et decima, et tredecima, et binis semper intermissis cæteræ sequentes rationales erunt, intermissæ autem cubo tantùm cognitæ. Adhuc, si prima et quinta solum rationales supponantur: tunc nona, tredecima, septemdecima, et ternis semper intermissis, singulæ rationales erunt. trium verò vbicunque intermissarum media quadrato tãtùm cognita, duæ cæterę mediales, hoc est, per secundum quadratum pronunciatæ. Denique si prima et septima tantùm supponantur rationales: tunc necesse erit tredecimam, vndeuicesimam, vigesimamquintam, et quinis semper intermissis singulas sequentes esse rationales. Quinque verò in quouis loco intermissarum mediam potentia tantùm esse rationalem: duas autem huic collaterales cubo tantùm pronunciabiles: duasque extremas rationalibus proximas quadrato cubi tantùm cognitas. Quæ corollaria ex ipsa proportione, ductuque quantitatum satis constat. Consyderata numerorum multitudine, quæ siue quadratis, siue cubis, siue secundis quadratis, siue quadratis cubicis proportionaliter intercidit. & ipsorum quadratorum, seu cuborum productis.

LIBRI SECVNDI PARS SECVNDA.

PROLOGOMENA.

CIRCA irrationalium quantitatum species succurrunt quædam speculationes tam ad magnitudinum Symmetriam, quàm ad praxis, & rationum pleniorẽ notitiam spectantes, olim à nobis explicatæ: quas, quoniam huic secundo libello congruæ videbantur, hìc subiunximus. Quare, vt apertius intelligãtur, exordium capiemus à diffinitionibus ipsarum irrationalium magnitudinum. Deinde nõ per lineas, & areas, quemadmodum Euclides, sed sub terminis cõmensurabilium & incommensurabilium quantitatum, earum conditiones, proprietates & colligantias proponemus, ac per nostra supposita demonstrabimus. Nec facile quispiam fuisse putet, elementa huiusmodi à lineis & areis ad quantitatem in genere sumptam transferre, & numerariam simul praxim hinc deriuatam ostendere: quippe quæ sicut passim in triuialibus scholis trita, ita nécubi satis fuerat demõstrata. Ordior itaque nouum demonstrandi genus, tantoq; in hac parte præstantius Euclideo, quanto generalis quantitas dignior ac purior & primariæ mathematicæ, quàm linea specialis, est conuenientior. Simul per viam hanc, quam in demonstrando assumimus, multa notescent, quæ in decimo Elementorum desyderantur.

DIFFINITIONES.

Commensurabiles magnitudines dicuntur quas communis mensura metitur.

Incommensurabiles verò, quarum impossibile est inueniri communem mensuram.

Commensurabiles potentia quantitates sunt, quarum potentiæ, hoc est quadrata, sunt commensurabilia.

Incommensurabiles vero potentia, quarum quadrata incommensurabilia.

Commensurabiles in secunda potentia quantitates sunt, quarum secunda quadrata sunt commensurabilia.

Incommensurabiles similiter, quarum incõmensurabilia.

Commensurabiles cubo quantitates sunt, quarum cubi commensurabiles.

Incommensurabiles verò cubo, quarum cubi incommensurabiles.

Quibus ita se habentibus, si proponatur quantitas quãpiam; erunt infinitæ quantitates illi commensurabiles, & quantitate, & potentia, & potentia secunda, & cubo.

Vocetur itaque proposita quantitas Rationalis, vnde & quadratum ipsius, & secundum quadratũ, & cubus, & quæcunque dignitates ab ea propagatę rationales erunt.

Et quantitas propositæ, siue magnitudine, siue potentia commensurabiles, rationalis vocetur.

Incommensurabilis verò, irrationalis.

Quibus ita diffinitis subiungemus singulas irrationalium diffinitiones: nam, cum

Quantitas rationalis sit, quę positę rationali commensurabilis est.

Rationalis potentia tantùm erit, cuius quadratum duntaxat rationale est. Similiter & rationalis cubo tantùm, cuius cubus tantùm rationalis est.

Medialis autem, cuius secundum quadratum duntaxat rationale est. Ex quibus diffinitionibus sequitur, vt quantitas rationalis sit etiam & potentia, & cubo, & potentia secunda rationalis: non autem è contrario. Item vt quantitas potentia rationalis sit etiam potentia secunda rationalis, non autem è contrario. Nunc diffiniemus quantitates irrationales bimembres.

Binomium constat ex duabus quantitatibus rationalibus ac potentia tantùm commensurabilibus. Quarum excessus

Apotome

Apotome, vel Residum dicitur. Et necesse est, vt earum quadrata conficiant rationale: earum verò productum mediale.

Bimediale primum constat ex duabus quantitatibus medialibus potentia tantùm commensurabilibus, & rationale comprehendentibus: quarum quadrata conficiunt mediale. Harum excessus. Residuum mediale primum dicitur.

Bimediale secundum constat ex duabus quantitatibus medialibus potentia tantũ commensurabilibus & mediale comprehendentibus: quarum quadrata conficiunt mediale, quod est mediali prædicto incommensurabile. Harum excessus Residuum mediale secundum dicitur.

Maior constat ex duabus quantitatibus potentia incommensurabilibus: quarum quadrata conflant rationale: & quod sub ipsis mediale. Harũ verò excessus dicitur Minor.

Potens rationale ac mediale constat ex duabus quantitatibus potentia incommensurabilibus, quarum quadrata cõflant mediale, & quod sub ipsis rationale. Harum excessus dicitur cum rationali mediale totum potens.

Potens duo medialia constat ex duabus quantitatibus potentia incommensurabilibus, quarum quadrata conflant mediale, & quod sub ipsis mediale prædicto incommensurabile. Harum excessus dicitur cum mediali mediale totum potens. In quibus sex diffinitionibus mediale intelligitur quantitas potentia tantùm rationalis. Namque omnis area, siue omne productum potentia tantùm rationale, solet ab Euclide mediale vocari. Et linea potens talem aream, solet ab eodem linea medialis dici. Quod tamen non interturbabit propositum nostrum. Nos enim quantitatem in genere siue illa linea sit, siue area, potentia tantùm rationalem vocamus, cuius quadratum rationale. Medialem verò, cuius quadratum secundum tantùm rationale est. Sed in diffinitionibus dictarum sex irrationalium sequemur Euclidem.

Præterea tam binomium, quàm residuum habet sex species sic distinctas. Quando maior portio Binomij, seu residui, est potentior breuiore in quadrato quantitatis sibi commensurabilis: ipsum est primæ, secundæ, vel tertiæ speciei. Quando verò maior portio breuiorem potentialiter excedit in quadrato quantitatis sibi incommensurabilis, ipsum est quartæ, quintæ, vel sextæ speciei. Deinde si maior por-

E e tionum

tionum fuerit rationalis quantitate binomium seu Residuum erit primæ, vel quartæ speciei. Si minor portio fuerit rationalis: erit secundæ, vel quintæ. Si neutra portionum fuerit rationalis, erit tertiæ, vel sextæ speciei.

SCHOLIA QVÆDAM.

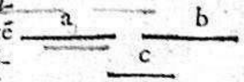
Notandum, quòd quantitatum alia est rationalis, Alia irrationalis. Et irrationalium, alia simplex, hoc est, vnius nominis, alia bimembris. Rursum, simplicium alia potentialiter tantùm rationalis: alia cubo tantùm, alia quadrato secundo tantum rationalis: quæ Medialis vocatur. Bimembrium autem duæ sunt precipuæ species. Prima species, cuius membra sunt potentialiter tantùm commensurabilia. Secunda, cuius portiones sunt etiam potentialiter incommensurabiles. Prima species est triplex; & totuplex secunda. Illa enim continet Binomium per compositionem partium, & Residuum per excessum. Item Bimediale primum, cum suo residuo mediali primo. Item Bimediale secundum, cum suo residuo mediali secundo. Hæc verò species continet Maiorem, cum Minori, item Potentem rationale, & Mediale, summque Residuum, scilicet cum rationali mediale potentem: Item Potentem duo medialia: summque Residuum cum mediali mediale potentem. Præterea tam Binomium, quàm Residuum est sex specierum. Quæ singula iamdudum diffinita sunt. Sed attendendum, quòd quantitas duorum nominum siue bimembris est, quæ constat ex duabus portionibus ita ad inuicem affectis, vt ad vnum nomen redigi nequeant. Secus enim non erit Binominis quantitas. Vt autem portiones tales alicuius quantitatis bimembris sint ita affectæ, vt ad vnum nomen redigi nequeant, opus erit duabus conditionibus, scilicet vt portiones sint inuicem incommensurabiles (nam portiones commensurabiles coniunctæ conficiunt quantitatẽ vnius nominis & eius speciei, cuius sunt partes, vt ostendemus) & insuper vt congeries quadratorum ipsarum portionum sit incommensurabilis producto earundem: sic enim fiet, vt talis congeries cum duplo talis producti (quòd est quadratum propositæ bimembris per quartam secundi) minimè faciat quantitatem vnius nominis. Nam si dicta congeries dicto producto commensurabilis esset; tunc congeries cum duplo dicto, hoc est, dictum quadratum, esset quantitas vnius nominis, & perinde quantitas ipsa esset vnius nominis: quia videlicet, radix vni nominis quadrati: quę conditiones exprimuntur in prędictis irrationalium diffinitionibus. Quoniam igitur necesse est, portiones, ex quibus bimembris quantitas, siue per compositionem, siue per abscissionem procedit, esse inuicem incommensurabiles: & insuper congeriem quadratorum earundem portionum esse incommensurabilem producto ipsarum: idcirco sex vtrinque irrationalium quantitatum species propagari oportet. Si enim portiones fuerint incommensurabiles in magnitudine tantùm, hoc est, potentia solùm commensurabiles, fient tres species irrationalium, scilicet prima, secunda, & tertia. Si autem portiones fuerint incommensurabiles etiam potentialiter, fient tres reliquę species, scilicet quarta, quinta, & sexta. Deinde, si congeries quadratorum ipsarum portionum fuerit rationalis, & productum earum mediale, fiet prima, vel quarta species. Si autem congeries medialis, & productum rationale, fiet secunda, vel quinta. Si verò tam congeries, quàm productum mediale, & alterutrum incommensurabile: fiet tertia, vel sexta species, tam scilicet per coniunctionem portionum, quàm per excessum maioris supra minorem.

SPECIES QVANTITATVM.

- Quantitas
  - Rationalis.
  - Irrationalis.
    - Simplex, scilicet rõnalis
      - Potentia tantum
      - Cubo tñ
      - Quadrato 2. tñ scilicet medialis
    - Bimembris ex Portionibus.
      - Potentia tantum cõmensurabilibus
        - Binomium vel residuum, quando portionum quadratorum aggregatum rationale, productũ mediale.
          - primum
          - 2um
          - 3um
          - 4um
          - 5um
          - 6um
        - Bimediale primum, vel Residuum mediale primum, quando portionum quadratorum aggregatum mediale productum rationale.
        - Bimediale secundum, vel Residuum mediale secundum, quando portionum quadratorum aggregatum mediale & productum mediale inuicem incommensurabilia.
      - Potentialiter etiã incõmẽsurabilibus
        - Maior, vel minor. quando partium quadratorum aggregatum rationale & productum mediale.
        - Potens rationale ac mediale, vel cum rationali mediale potens, quando partium quadratorum aggregatum mediale & productũ rationale.
        - Potens duo medialia, vel cum mediali mediale potens. quando partium quadratorũ aggregatũ mediale, & productũ mediale inuicem incommensurabilia.

PROPOSITIO. 43a.

Omnes duæ quantitates inuicem commensurabiles, sunt sicut numerus ad numerum. Et duæ quantitates, quæ sunt sicut numerus ad numerum, sunt inuicem commensurabiles. Sunto a. & b. quãtitates inuicẽ cõmensurabiles: Aio, ꝙ sunt sicut numerꝰ ad numerũ. Cũ enim cõmensurabiles sint inuicẽ a b. erit ꝑ diffi. cõmensurabiliũ quãtitatũ, cõis earũ mensura, quæ sit c. Itaq; a. diuidetur in aliquot partes singulas æquales ipsi c. Itemq; b. diuidetur in aliquot partes singulas æquales ipsi c. Quare a. & b. erunt ad inuicẽ sicut numeri partiũ. Et hæc est prima pars propositi. Contrà, sit a. quantitas ad b. quãtitatẽ sicut numerus ad numerũ. aio, ꝙ a b. cõmensurabiles inuicẽ sunt. Secetur eñ a b. singulæ in tot partes æquas, quot vnitates hñt singuli numeri. sitq; c. vna partiũ quantitatis a. eritq; c. ad a. sicut vnitas ad numerũ partiũ a. Sed per hypotesim a. ad b. sicut numerꝰ partiũ a. ad numerũ partiũ b. Erit igitur ex æquali c. ad b. sicut vnitas ad numerum partium b. Quare quoties vnitas mensurat numerum

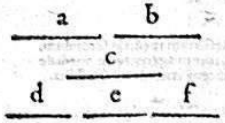


partium b. toties & c. quantitates mensurat ipsam b. Sed c. metitur ipsam a. igitur per diffin. commensurabilium quantitatum, ipsæ a b. quantitates inuicem commensurabiles. Quod fuit residuum propositi.

COROLLARIVM.

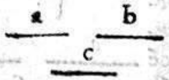
Vnde manifestum est, quòd duæ quantitates inuicem incommensurabiles non sunt adinuicem sicut numerus aliquis ad numerum aliquem. Itemque, quòd duæ magnitudines, quæ non sunt ad inuicem sicut numerus quispiam ad numerum quempiam, sunt inuicem incõmensurabiles. Sequuntur hæc ex præmissa a destructione contrariorum.

PROPOSITIO 44^{a}.



Omnes duæ magnitudines vni commensurabiles, sunt inuicem commensurabiles. Duæ quantitates sint a b. quæ singulæ sint ipsi c. commensurabiles. Aio, quòd & ipsę a b. sunt ad inuicem commensurabiles. Nam cum a c. sint commensurabiles erunt, per præcedentem, sicut numerus ad numerum: & similiter, quoniam c b. commensurabiles erunt, & sicut numerus ad numerum. Sumantur igitur per quartam octaui Eucl. tres numeri d e f. continuantes duas rationes scilicet, vt sicut est a. ad c. sic sit numerus d. ad numerum e. & sicut c. ad b. sic sit numerus e. ad numerum f. & tunc ex equali erit, sicut numerus d. ad numerum f. sic quantitas a. ad quantitatem b. Igitur per secundam partem præcedentis, quantitas a b. sunt ad inuicem commensurabiles. quod est propositum.

PROPOSITIO 45^{a}.



Omnes duæ quantitates, quarum vna commensurabilis est alicui tertiæ, reliqua verò eidem incommẽsurabilis, sunt adinuicem incommensurabiles. Exempli gratia, magnitudinum a b. vna scilicet a. sit commensurabilis ipsi c. reliqua verò b. incõmensurabilis eidem c. Aio tunc, quòd ipsæ a b. inuicem incommensurabiles sunt. Secus enim erunt a b. commensurabiles: sed ipsæ a c. per hyp. cõmensurabiles. igitur per pręmissam erunt b c. inuicem commensurabiles: quod est suppositio contrarium. Nõ igitur sunt a b. inuicem commensurabiles, ergo incommensurabiles. quod est propositum.

PROPOSITIO 46^{a}.

Omnium duarum quantitatum inuicem incommensurabilium congeries & excessus sunt inter se & ipsis inuicem incommensurabiles. Et si congeries vni earum sit incommensurabilis, erit &

reliquæ

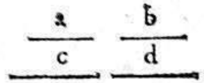
reliquæ commensurabilis. & ipsæ inter se commensurabiles. Hæ conclusiones facilè constant ex hac communi sententia: quoniam quantitas, quæ metitur partes, metitur & totũ. Et, quæ metitur totum & ablatum, metitur & relictũ.

PROPOSITIO 47^{a}.

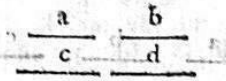
Omnium duarum quantitatum inuicem incommensurabilium congeries & excessus, sunt inter se & ipsis inuicem incommensurabiles. Et si congeries vni earum sit incommensurabilis, erit & reliquæ incommensurabilis. Et ipsæ inter se incommensurabiles. Nam si secus esset, tunc, per præcedentem, sequeretur contrariũ suppositi. Omnino igitur vera sunt quę proponuntur.

PROPOSITIO 48^{a}.

Omnes duæ quantitates proportionales duabus quantitatibus quoquo modo commensurabilibus, sunt eodem modo commensurabiles. Et proportionales duabus aliquo modo incommensurabilibus, sunt eodem modo incommensurabiles. Exempli gratia, sint quantitates a b. ipsis c d. quantitatibus inter se commensurabilibus proportionales: hoc est sit a. ad b. sicut c. ad d. Aio, quòd a b. erunt inuicem commensurabiles. Nam si c d. sunt commensurabiles, erunt per 43^{a} huius, sicut numerus ad numerum. Igitur erit a. ad b. sicut numerus ad numerum: quare per secundam partem dictæ 43^{e} a b. sunt inter se commensurabiles. Quòd si c d. sint commensurabiles, aio, quòd & a b. inter se incommensurabiles erunt. Nam tunc, per corollar. 43^{e} huius, c d. non erunt sicut numerus ad numerum, & ideo neque a. ad b. erit sicut numerus ad numerum: & perinde per secundam partem dicti corollarij a b. tunc incõmensurabiles inter se erunt sicut proponitur.



Item si c d. ponantur aut potentia tantùm, aut cubo tantũ, aut quadrato secundo tantùm commensurabiles: eodem penitus modo & ipsæ a b. commensurabiles erunt. Si autem c d. aliquo dictorum modorum ponantur incommensurabiles: eodem similiter modo & ipsę a b. incommensurabiles erunt: Quoniam scilicet quantitatum proportionalium proportionales sunt tã quadrata, quàm cubi, & quàm secunda quadrata. Et idcirco sequitur eorum commensurabilitas, vel incommensurabilitas: quippe quæ comitatur proportionem, adducta 41^{a} & eius corollario.



PROPOSITIO 49^{a}.

Omnis quantitas rationalis multiplicans aliquam quantitatem, producit quantitatem multiplicatæ cognominem & commensurabilem.

a	b	c
3	r.5.	r.45
d	e	f
9	5	45

mensurabilem. Exempli gratia, rationalis quantitas a. multiplicet quantitatem b. potentia tantùm rationalem, & faciat c. Aio, quòd c. potentia tantùm rationalis est, & ipsi b. multiplicatæ commensurabilis. Sit enim ipsius a. quadratum d. & ipsius b. quadratum e. & ex d. in e. fiat f. Eritque per coroll. vndecimę huius, f. quadratum ipsius c. Cumque ex diffinitionibus, quantitatum a b. ipse d. sit numerus quadratus: ipse autem e. numerus non quadratus: iam eorum productum f. per coroll. secundæ noni Eucl. non erit numerus quadratus. Igitur c. quæ radix est ipsius f. per diffin. erit potentia tantùm rationalis. Cumque per diffin. multiplicationis, c. productū ad b. multiplicatam, sit sicut a. multiplicans ad positam: sitque a. positæ commensurabilis, quia rationalis: iam, per præcedentem, ipsa c. ipsi b. commensurabilis erit: sicut proponitur. Similiter autem, si b. cubo tantùm rationalis supponatur, ostendetur & ipsa c. cubo tantùm rationalis, & ipsi b. commensurabilis: & si b. quadrato secundo tantùm rationalis ponatur, & ipsa c. quadrato secundo tantùm rationalis, & ipsi b. commensurabilis demonstrabitur. Sicut proponitur.

Propositio 50ª.

Si productum fuerit commensurabile multiplicatæ quantitati, tunc multiplicans est rationalis. Vt si a. multiplicans b. faciat c. ipsi b. commensurabilem: aio, quòd a. rationalis est. Nam per diffin. multiplicationis, erit, sicut c. ad b. sic a. ad positam. Cumque per hypo. c. sit commensurabilis ipsi b. erit per antepræmissam a. commensurabilis positæ, quare per diffin. a. rationalis: quod est propositum.

a	b	c

Propositio 51ª.

Omnis quantitas diuisa per quantitatem sibi commensurabilem, exhibet in quotiente quantitatem rationalem. Sint a b. quantitates commensurabiles inter se, & diuidatur b. per ipsam a. & proueniat c. Aio, quòd c. quantitas rationalis est. Nam, per diffin. diuisionis, erit, sicut a. diuidens ad positam, sic b. diuisa ad c. prouenientem. Et permutatim, sicut a. ad b. sic posita ad c. Sed a. per hypot. commensurabilis est ipsi b. ergo per 48ª præmissam, & posita commensurabilis ipsi c. Ergo c. rationalis: quod est propositum. Hoc idem ex præcedenti ostendi potest.

a	b	c

Pro-

Propositio 52ª.

a	b
c	d
e	f
g	h

Omnium duarum quantitatum inuicem commensurabilium quadrata sunt adinuicem sicut quadrati numeri: & cubi, adinuicem, sicut cubi numeri: & secunda quadrata, sicut bis quadrati numeri: Vt si sint a b. quantitates inuicem commensurabiles, quarū quadrata sint c d. cubi aūt e f. secunda autē quadrata g h. Aio, quòd c d. erunt sicut quadrati numeri adinuicem: & e f. sicut cubi numeri: & g h. sicut bis quadrati numeri. Nam, per 45ª huius, a b. quantitates erunt ad inuicem, sicut numerus ad numerum: sed tam in quātitatibus, quàm in numeris quadrata sunt in dupla: cubi in tripla: secunda quadrata in quadrupla ratione radicū. Igitur c d. sunt ꝓportionales quadratis talium numerorum. Et e f. proportionales cubis talium numerorum: & g h. proportionales bis quadratis talium numerorum. Et hoc est propositum.

Propositio 53ª.

Omnes duæ quantitates, quarum quadrata sunt adinuicem sicut quadrati numeri; vel quarum cubi sunt adinuicem sicut cubi numeri: vel quarum secunda quadrata sunt adinuicem sicut bis quadrati numeri, sunt inter se commensurabiles. Exempli gratia, sint duæ quantitates a b. quarum quadrata c d. & quarū cubi e f. & quarum secunda quadrata g h. Aio, quòd, si c d. fuerint adinuicem, sicut quadrati numeri: vel si e f. fuerint adinuicem, sicut cubi numeri; vel f. g h. fuerint adinuicem, sicut bis quadrati numeri: Tunc in omni tali casu, ipsæ a b. quantitates erunt adinuicem commensurabiles. Nam si c d. sint inter se, sicut quadrati numeri; cùm talibus numeris intersit vnus medius numerus proportionalis, intererit ipsis c d. vna media quantitas proportionalis, quæ sit k. eruntque c k d. quantitates talibus tribus numeris proportionales: cumque quadrata sint in dupla ratione radicum: erit sicut c. ad k. sicut a. ad b. Sed c. ad k. sicut numerus ad numerum: igitur a. ad b. sicut numerus ad numerum: quare per secundam partem 45ª huius, a b. inuicem commensurabiles: quod est propositum. Si autem e f. sint inter se sicut cubi numeri: tunc, quia talibus numeris intersunt duo numeri medij proportionales, intererunt ipsis e f. duæ mediæ quantitates proportionales, quæ sint

a . b
e . k . d
e . l . m . f
g . n . o . p . h

2 . 3
4 . 6 . 9
8 . 12 . 18 . 27
16 . 24 . 36 . 54 . 81

 l m.

l m. eruntque c l m f. quantitates talibus quatuor numeris proportionales. & quoniam cubi sunt in tripla proportione radicum: erit, sicut a. ad b. sic e. ad l. sed e. ad l. sicut numerus ad numerum: Igitur sicut numerus ad numerũ, sic a. ad b. & ideo per secundã partem 43ᵉ ab inuicem commensurabiles. Si demum g h. sint inter se, sicut bis quadrati numeri: tunc quoniam talibus numeris intererunt tres numeri medij proportionales, intererunt & ipsis g h. tres mediæ proportionales quantitates: quæ sint n o p. eruntque g n o p h. quantitates talibus quinque numeris proportionales: & quoniam secũda quadrata sunt in quadrupla ratione radicum: erit iam a. ad b. sicut g. ad n. Sed g. ad n. sicut numerus ad numerum: igitur sicut numerus ad numerum, sic a. ad b. quare per secundam partem 43ᵉ ab inuicem commensurabiles, sicut fuerat à principio demonstrandum.

COROLLARIVM.

Ex his manifestũ est, quòd omnium duarum quantitatum inuicem incommẽsurabilium, neq; quadrata sunt adinuicẽ, sicut quadrati numeri: neque cubi, sicut cubi numeri, neque secunda quadrata, sicut bis quadrati numeri.

COROLLARIVM.

Contrà, & omnes duę quantitates, quarum quadrata non sunt ad inuicem, sicut quadrati numeri; vel quarum cubi non sunt ad inuicem, sicut cubi numeri: vel quarum secunda quadrata non sunt ad inuicem, sicut bis quadrati numeri; sunt inter se commensurabiles. Nam hæc duo corollaria constant ex duobus præcedentibus propositionibus, à distinctione contrariorum.

COROLLARIVM.

Præterea manifestum est, quòd quantitates inter se cõmensurabiles, sunt omnino, etiam tam quadrato, quàm cubo, quàmque secundo quadrato commensurabiles; non autem è conuerso. Nam quantitates, siue quadrato, siue cubo, siue secundo quadrato commensurabiles, non sunt omnino inter se commensurabiles.

COROLLARIVM.

Vnde sequitur, vt quantitas rationalis sit etiam potentia, & cubo, & quadrato secundo, & sic in infinitum rationalis: & non è conuerso. Nam quantitas siue potentia, siue cubo, siue quadrato secundo, rationalis non omnino est magnitudine rationalis.

Corol-

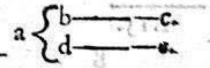
COROLLARIVM.

Contrà, quantitates inter se incommensurabiles non omnino sunt & potentia, aut cubo, aut quadrato secundo incommensurabiles. At quantitates potentia, vel cubo, vel quadrato secundo incommensurabiles omnino sunt & magnitudine inter se commensurabiles.

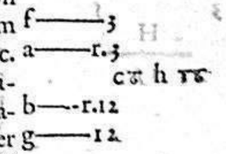
COROLLARIVM.

Vnde sequitur, vt quantitas irrationalis nõ omnino sit & potentia, aut cubo, aut quadrato secundo irrationalis. Quantitas verò potentia, vel cubo, vel quadrato secundo irrationalis omnino sit, & magnitudine irrationalis. Quæ corollaria gradatim sequuntur alterum ex altero, vt etiam per exempla numeralium terminorum constat.

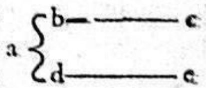
PROPOSITIO 54ᵃ.



Omne productum duarum quantitatum potentia tantùm rationalium inuicem commensurabilium, est rationale. Exempli gratia, a b. quantitates potentia tantùm rationales inuicem commensurabiles multiplicatæ inuicem faciant ipsam c. Aio, quòd c. quantitas rationalis est. Sit enim ipsi a. æqualis d. & a. ducta in d. hoc est in se ipsam faciat e. quæ iam rationalis est, cum a. sit potentia rationalis per hyp. Sed per primam sexti, sicut d. ad b. sic e. ad c. commensurabilis est autem per hypo. ipsa d. ipsi b. ergo, per 48ᵃ huius, ipsa e. commensurabilis erit ipsi c. Rationalis est autem e. rationalis ergo per diffin. & c. quod fuit demonstrandum. Aliter & pulchre sic. Sit ipsius a. quadratum ipsa f. & ipsius b. quadratum ipsa quantitas g. eritque per 52ᵃ præcedentem f. ad g. sicut numerus quadratᵘˢ ad numerum quadratum. Ducatur ergo f. in g. & proueniat h. eritque h. numerus quadratus: quandoquidem f g. per vigesimam octaui, sunt plani similes. Sed per corollariũ vndecimæ huius h. est quadratum ipsius c. ergo c. rationalis, quandoquidem radix est ipsius h. quæ per numerum quadratum repræsentatur. Et radix quadrati numeri rationalis quantitas est; quia cognitus, & scitus numerus, sicut proponitur ostendendum.



PROPOSITIO 55ᵃ.



Omne productum duarum quantitatum rationalium & potẽtialiter tantùm inter se commensurabilium, est potentia tantùm rationale: quod tamen ab Euclide vocatur mediale. Sunto a b. quantitates rationales, hoc est ambæ potentia tantum rationales,

nales, vel vna rationalis in magnitudine, altera verò tantum potentia, & inuicē potentialiter tm̄ cōmēsurabiles, quę inter se multiplicatæ faciant ipsam c. Aio, q̄ c. est quātitas potētia tm̄ rationalis. Fiant enim ea, quæ in præcedenti, eritque per eadem, sicut d. ad b. sic e. ad c. cumq; per hyp. ipsa d. ipsi b. sit potentialiter tantum cōmensurabilis: erit per 48ᵃ huius, ipsa e. quę rationalis est, potētialiter tm̄ cōmēsurabilis ipsi c. Igitur per diffin. c. potentia tm̄ rationalis est, quod est propositum. In altera verò demonstratione, erit per coroll. 93ᵉ præcedentis, f. ad g. non sicut quadratus numerus ad quadratum numerum & : idcirco f g. per 20ᵃ octaui non erunt adinuicem plani numeri similes. Quare, per primā noni, ipse h. ipsorum f g. productū non erit quadratus numerus, & perinde c. ipsi⁹ h. radix potētia tm̄ rationalis est, sicut ꝓponitur.

SCHOLIVM.

Illud autem notandum, quòd præfatum productum quantitatum rationaliū ab Euclide vocatur medialis quātitas, siue Medialis area: quoniam gignitur ex ductu laterum, atq; ita intelligendæ sunt diffinitiones irrationalium magnitudinum, vbi de areis mentio fit. Lineam verò in talem aream potentem, hoc est, cuius quadratum est talis area, medialis dicitur.

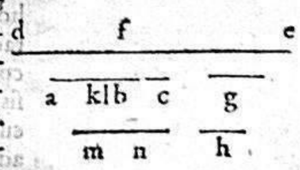
PROPOSITIO 56ᵃ.

Membra binomij, siue residui, sunt radices duorum numerorū, quorum maior ad excessum supra minorem sese habet sicut numerus quadratus ad numerum quadratum, fiunt tres primæ species. Si autem secus, fiunt tres reliquæ species Binomij, siue Residui. Item si maior ex numeris dictis sit quadratus, tunc fit prima vel quarta species. Si minor sit quadratus numerus, fiet secunda vel quinta: si neuter sit quadratus numerus, fiet tertia vel sexta species. Exempli gratia, 9. & 5. numeri sunt quadrati membrorum primi Binomij, siue Residui. Numeri 12. & 9. secundi. Numeri 8. & 6. tertij. Numeri 25. & 20. quarti. Numeri 14. & 9. quinti. Numeri 10. & 7. sexti. Vnde talium specierū radices sic se habent: vt earū diffinitiones exposcūt.

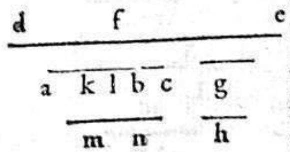
Binomium pᵘ ——— 3. p̄ r. 5. *Vnde per abscissionem*
Binomium 2ᵘ ——— r. 12 p̄ 3. *formantur totidem*
Binomium 3ᵘ ——— r 8 p̄ r. 6. *species residuorum.*
Binomium 4ᵘ ——— 5 p̄ r. 20
Binomium 5ᵘ ——— r. 14 p̄ 3.
Binomium 6ᵘ ——— r. 10 p̄ r. 7.

PROPOSITIO 57ᵃ.

Singularum Binomij specierum radices, sunt speciæ singulæ irrationales quantitates per ordinem, scilicet Binomium, Bimediale primum, Bimediale secundum, Maior, Potens rationale ac mediale. & potens duo medialia. Paucis propositum demonstrabo. Esto Binomium, cuius membra a b. b c. Sit ipsius a b. quadratum d e. & ipsius b c. quadratum e f. quorum differentia f d. cuius differentiæ quarta pars sit g. & ipsius g. radix sit h. Mox secta per æqualia quantitate a b. apud k. punctum, ponatur ipsi h. æqualis k l. Post hæc, totius a k l. radix sit m. Relicti autem l b. radix sit n. Aio iam, quòd totum m n. radix est binomij a b c. Deinde ostendam, quòd si a b c. sit binomium primum, tunc m n. erit binomium. Si a b c. binomium secundum, tunc m n. erit Bimediale primum. Si a b c. binomium tertium, tunc m n. erit bimediale secundum. Si a b c. binomium quartum, tunc m n. erit maior. Si a b c. binomium quintum; tunc m n. Potens rationale ac mediale. Si demum a b c. binomium sextum, tunc m n. Potens duo medialia. Nam cùm a b. secetur æqualiter apud k. & inæqualiter apud l. iam per quintam secundi Elementorum Rectangulum a l. l b. cum quadrato k l. hoc est cum g. æqualia sunt quadrato a k. hoc est, quadranti ipsius d e. Sed quadratum ipsius k l. hoc est g. fuit quadrans ipsius d f. igitur reliquum quadrans reliqui, hoc est, rectangulum a l. l b. erit quadrans ipsius e f. Quare per coroll. vndecimæ huius, rectangulum m n. erit radix quartæ partis ipsius e f. hoc est dimidium ipsius b c. ergo duplum ipsius rectanguli m n. æquiualet totum b c. Cumque per hyp. a l. sit quadratum ipsius m. & l b. quadratum ipsius n. erunt quadratum m. quadratum n. cum duplo rectanguli m n. simul æqualia toti a c. Sed per quartam secundi; eadem simul componunt quadratum totius m n. Igitur totum m n. radix est totius a c quod erat primum ex demonstrandis. Reliquum patet ex conditionibus ipsarum specierum binomij: fit enim, vt exeunte a b c. binomio primo, tunc a l. l b. sint rationales. Exeunte autem a c. binomio secundo, vel tertio, fit, vt a l. l b. sint potentia tantùm rationales. Quare exeunte a c. binomio primo, erunt



m n. potentia rationales. Exeunte autem a c. binomio secundo, vel tertio, erunt m n. mediales: quandoquidem a l. l b. quadrata ipsarum m n. potentia tantùm rationalia. Et hoc, quoniam, per diffin. binomij primi, secundi, & tertij, radix ipsius d f. & ideo radix ipsius g. hoc est h. hoc est k l. commensurabilis est ipsi a b. & ideo ipsi a k. vel k b. ipsisque a l. l b. cumque, per primam sexti, m. ad n. sit sicut quadratum m. ad rectangulum m n. hoc est sicut a l. ad dimidium b c. Ideo tunc per quadragesimam octauam huius, constat ipsas m n. esse potentia tantùm commensurabiles. Existente autem a c. binomio quarto, quinto vel sexto, fit vt a l. l b. sint inuicem incommensurabiles: quoniam scilicet, per diffin. talium binomiorum, radix ipsius d f. & perinde radix ipsius g. hoc est ipsa h. & ipsa k l. incommensurabilis est ipsi a b. & idcirco ipsi a k & ipsis a l. l b. quare, per quadragesimam septimam huius, ipse a l. l b. inuicem incommensurabiles. Vnde constat ipsas m n. tunc esse potentia incommensurabiles. Item cum rectangulum m n. sit dimidium ipsius b c. atque exeunte a c. binomio primo, tertio, quarto, vel sexto ipsa b c. sit potentia tantũ rationalis: ideo tunc rectangulum m n. erit mediale. Exeunte verò a c. binomio secundo, vel quinto b c. erit magnitudine rationalis: quare tunc rectangulum m n. erit rationale. Præterea cùm quadrata m n. conficiant totam a b. atque exeunte a c. binomio primo vel quarto a b. sit magnitudine rationalis: Exeunte verò a c. binomio secundo, tertio, quinto, vel sexto, a b. sit potentia tantùm rationalis: Idcirco exeunte a c. binomio primo vel quarto, quadrata m n. conficiunt rationale. Exeunte verò a c. binomio secundo, tertio, quinto, vel sexto, quadrata m n. conficiunt mediale. Ex quibus quidem, consyderatis irrationalium quantitatum diffinitionibus, cõstabit quòd exeunte a c.



Binomio	p°		binomium.
	2°		bimediale primum.
	3°	m n. erit	bimediale secundum.
	4°		Maior.
	5°		Potens rõale ac mediale.
	6°		Potens duo medialia.

Corol-

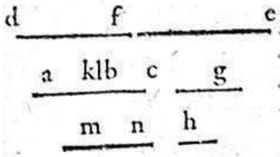
COROLLARIVM.

Hinc ergo comperiri poterunt singulæ quantitates irrationa les: vt si velim, exempli gratia, comperire irrationalem quantitatem, quæ Maior vocatur, per præcedentem, inueniam quartum binomium: & per præsentem, ipsius binomij radicem, quæ, vt ostensum est, Maior erit. Et similiter per reliquas binomiorum species reliquas irrationales inueniemus.

PROPOSITIO 58ª.

Sex irrationalium quantitatum, scilicet Binomij, Bimedialis primi, Bimedialis secundi, Maioris, Potentis rationale ac mediale, Potentisq́ duo medialia, singularum per ordinem, singula quadrata sunt singulæ species Binomij. Hæc est conuersa prę cedentis. Persistam tamen in eadem descriptione, ac suppositis. Ponaturque m n. binomium, vel aliqua ex irrationalibus prædictis. ita vt m n. sint membra ipsius irrationalis iuxta eius diffinitionem considerata: vt habeam ipsius m n. quadratum, ponam ipsius m. quadratum a l. & ipsius n. minoris membri quadratum l b. Item eius, quod fit ex m. in n. duplum ipsam b c. Eritque per quartam secundi Elementorum, tota a c. quadratum totius m n. Demonstrandum est igitur, quòd si ponatur m n. aliqua ex dictis sex quantitatibus irrationalibus: erit & a c. aliqua ex speciebus binomij: & quota m n. in ordine sex irrationalium, tota & a c. in ordine specierum binomij. Namque ex conditionibus membrorum m n. componentium ipsam irrationalem, sequitur conditio membrorũ a b. b c. constituentium speciem binomij. Sic existente m n. Binomio, vel Bimediali primo, vel Bimediali secundo, iam per diffin. a l. l b. quæ sunt ipsorum m n. quadrata, sunt inuicem cõmensurabiles. Vnde per 46ª huius, sequitur vt k l. sit ipsis a l. l b. & toti. a b. commensurabilis. Cumque h. sit radicis ipsius d f. dimidium, erit talis radix commensurabilis ipsi a b. Igitur a b. potentior quàm b c. in ipsa d f. quadrato scilicet radicis sibi commensurabilis. Existente autem m n. Maiori, Potenti rationale ac mediale, potentive duo medialia; tunc per earum diffin. a l. l b. sunt inuicem incommensurabiles: vnde per 47ª huius sequitur, vt k l. sit ipsis a l. l b. & toti a b. incommensurabilis: vtque k l. hoc est h. ipsius radicis d f. dimidium, & perinde ipsa radix sit ipsi a b. incommensurabilis. Quo fit, vt a b. potentior sit, quàm b c. in ipsa d f. cuius radix est ipsi

a b. in-

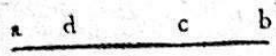


ab. incōmensurabilis. Item, qm̄ existente m n. binomio, vel Maiori, a b. est rationalis: b c. verò potentia tantùm est rationalis. Existente autem m n. Bimediali primo, vel potente rationale, & Mediale, a b. est potentia tantum rationalis, b c. verò rationalis. Existente tandem m n. Bimediali secundo, vel potente bina medialia, tam a b. quàm b c. est potētia tm̄ rationalis. Preterea, quoniam existēte m n. binomio, Bimediali primo, Maiori, vel potente rationale & mediale ipsarū a b. b c. altera est magnitudine; altera potentialiter tantùm rationalis. atque ideo a b. b c. sunt potentialiter tantùm cōmensurabiles. Existente autem m n. Bimediali 2° cum per primam sexti, m. ad n. sit sicut quadratū m. ad rectangulum m n. hoc est, sicut a l. ad dimidiū ipsius b c. atque m n. sint incommensurabiles. & ideo a l. & dimidium ipsius b c. sint incommensurabiles per 48ª huius: Cumq; (quoniam a l. l b. inter se commensurabiles, ideoq; tota a b. ipsi a l. commensurabilis est, iam tota a b. dimidio ipsius b c. Et ideo toti b c. per 45ª huius, sit incommensurabilis: sintq; a b. b c. potentialiter commensurabiles: qā potētia rationalis ex diffi. dicti Bimedialis secundi. Existente tandem m n. potente duo medialia, cum a b. b c. ex diffin. ipsius, sint incommensurabiles: ac potentialiter tantùm commensurabiles, quia scilicet, potia rationales, sicut omnia ex diffinitionibus ipsarum irrationalium cōstat. Propterea, consyderatis sex specierum binomij conditionibus, existente

M n	Binomio	a c erit	pᵘ	Binomium
	Bimediali p°	a c erit	2ᵘ	
	Bimediali 2°	a c erit	3ᵘ	
	Maiori	a c erit	4ᵘ	
	Potēte rationale, mediūq;	a c erit	5ᵘ	
	Potente duo medialia	a c erit	6ᵘ	

PROPOSITIO. 59ª.

Omne aggregatum quadratorum inæqualium excedit duplum producti radicum in quadrato differentiæ radicum. Secetur quantitas a b. per inæqualia apud c. & à maiori portione a c. abscindatur ipsi b c. æqualis c d. Atq; ita ostendendū est, quòd congeries quadratorum a c. c b. supererat duplum ipsius rectanguli a c. c b. in quadrato ipsius d a. quod à Campano in decimo Elementorum ostensum est. Per quartam secundi, quadratum a c. & quadratum c b. cum duplo

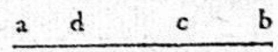


rectanguli

rectanguli a c. c b. simul æqualia sunt quadrato a b. Quod per octauam secundi, æquale, est quadrato d a. cum quadruplo rectanguli a c. c b. Auferatur vtrinque duplum rectanguli a c. c b. & supererunt quadratum a c. & quadratum c b. simul æqualia quadrato d a. & duplo rectanguli a c. c b.

Hæc autem est demonstratio.

8ª secūdi { □. a c — □. c b — ▭ ▭ a c. c b } simul æqlia sunt □to a b. Qd p 8ª 2ⁱ æquale est { □. d a — ▭ ▭ ▭ ▭ ac. c b. }

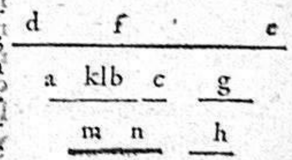


Auferatur vtrinque ▭ ▭ a c. c b. & supererunt { □. a c — □. c b } simul æqualia { □. d a — ▭ ▭ a c. c b. }

Et hoc demōstrādū fuit.

PROPOSITIO 60ª.

Singularum residui specierum radices, sunt ipse singulæ irrationales residuales quantitates per ordinem: videlicet Residuum, Residuum mediale primum, Residuum mediale secundum, Minor, cum rationali mediale totum potens, & cum Mediali mediale totum potens. Repetam descriptionem, supposita & demonstrata 57ª præcedentis. Hoc solùm mutato, vt pro aggregato membrorum a b. b c. sumatur eorundem differentia, quā valet maius membrum a b. excedit minus b c. Nam si aggregatum supponitur binomium: iam per diffin. differentia erit Residuum eiusdem speciei. Item pro aggregato portionum m n. (quod aggregatum erat radix ipsius a b c. binomij) sumatur differentia earundem m n. quā scilicet maior portio m. superat minorem n. Quæ differentia erit irrationalis quantitas residualis illius quantitatis, quam cōflabant portiones m n. per diffinitionem. Ostendam igitur, quòd sicut ipsius aggregati a b c. radix fuit ipsum aggregatum m n. ita differentiæ ipsarum a b. b c. radix erit differentia ipsarum m n. Sic, cum ipsius m. quadratum sit a l. atq; ipsius n. quadatum sit l b. iam a b. erit aggregatum duorum quadratorum inæqualium, quorum radices m n. Sed b c. fuit duplum producti talium radicum: igitur, per præcedentem, ipsa a b. excedit ipsam b c. in quadrato differentiæ earundem radicum, hoc est, differentia ipsarum a b. b c. est quadratū differentiæ ipsarum m n. Et perinde hæc differentia erit radix illius. Quamobrem per demostrata in 57ª. præcedenti,



præcedentis, si illa differentia fuerit residuum primæ speciei: hæc differentia erit residuum.

Si illa, Residuum 2ᵉ speciei, hæc Residuũ mediale primũ.
Si illa, Residuũ 3ᵉ speciei, hæc Residuũ mediale secũdũ.
Si illa, Residuum 4ᵉ speciei: hæc irrationalis, quæ Minor.
Si illa, Residuum 5ᵘ, hæc cum rationali mediale potens.
Si illa, residuum 6ᵘ, hæc cum mediali mediale potens.
Et hoc est, quod demonstrandum proponebatur.

COROLLARIVM.

Vnde manifestum est, quòd compertis per 57ᵃ præcedentem, sex irrationalibus quantitatibus prædictis, quę singulæ ex binis membris constant inæqualibus: Iam eorundem membrorum differentiæ singulæ erunt Residuales quantitates prædictarum bimembrium. Item si bimẽbribus sua singulis quadrata attribuantur (quæ binomia sunt) talium binomiorum Residua erunt singula singularum dictarum Residualium quadrata.

Propositio 61ᵃ.

Sex irrationalium quantitatum residualium, scilicet Residui, Residui medialis primi, Residui medialis secundi, Minoris, Cum rationali mediale potentis, Cum mediali mediale potentis, singularum per ordinem, singula quadrata sunt singulæ sex species Residui. Sicut præcedens sequitur ex demõstratis 59ᵉ & 57ᵉ Ita præsens propositio similiter ex ijs, quę in 59ᵃ & 58ᵃ ostensa sunt, constabit.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, quòd Binomij, & Residui habentium æqualia nomina, radices inter se habent etiam æqualia nomina: & è contrario, Binomium & Residuum, quorũ radices habent æqualia nomina, sortiuntur etiam inter se nomina æqualia. Idemque de nominibus proportionalibus dicendum. Nam æqualitas nominum in quadratis, facit æqualitatem nominum in radicibus: & è contrario. Proportio verò proportionem, sicut per processum demonstrationis 57ᵃ & 58ᵉ constare potest. Nunc exponam hic sex species binomiorum, & totidem earum radices, quæ sunt sex irrationales quantitates.

Binomia

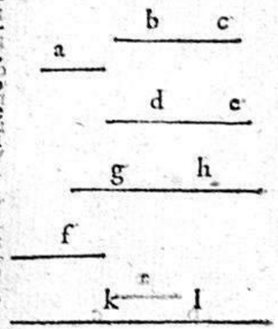
Binomia sex ...... Quarũ radices sunt totidẽ irrõales quantitates sibimẽbres.
Primum 7 p̄ r. 40 ...... Binomium r. 5. p̄ r. 2
Secundum r. 18. p̄ 4 .... Bimediale primum. rr. 8. p̄ rr. 2.
Tertium r. 27. p̄ r. 24 .. Bimediale secundum rr. 12. p̄ rr. 3.
Quartum 6. p̄ r. 8 ...... Maior r. v. 3. p̄ r. 7. p̄ r. v. 3. m̄. r. 7.
Quintũ r. 32. p̄ 4 ...... Potens rationale & mediale r. v. r. 8. p̄ 2. p̄ r. v. r. 8. m̄. 2.
Sextum r. 24. p̄ r. 8 .... Potens duo medialia r. v. r. 6. p̄ 2. p̄ r. v. r. 6. m̄. 2.

Ex quibus, per abscissionem minoris membri à maiore, fient tam in Binomijs, quàm in eorum radicibus, totidem Residua, hoc pacto.

Residua sex ...... Quorum radices, totidem Residuales irrationales scilicet.
primum 7. m̄ r. 40 ... Residuum r. 5. m̄ r. 2.
Secundum r. 18. m̄. 4 .. Res. mediale primum rr. 8. m̄. rr. 2.
Tertium r. 27. m̄. r. 24. Resi. mediale secundũ rr. 12. m̄. rr. 3.
Quartum 6. m̄ r. 8 .. Minor r. v. 3. p̄ r. 7. m̄ r. v. 3. m̄ r. 7.
Quintum r. 32. m̄ 4 .. Cum rationali mediale potens. r. v. r. 8. p̄ 2. m̄ r. v. r. 8. m̄. 2.
Sextum r. 24. m̄. r. 8 ... Cum mediali mediale potens. r. v. r. 6. p̄ 2. m̄. r. v. r. 6. m̄. 2.

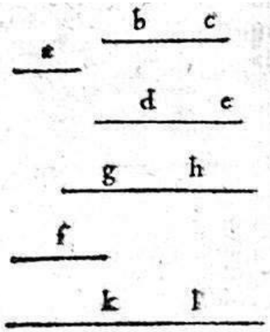
Sic habes exempla practica eorum, quæ demonstrata sunt.

Propositio 62ᵃ.



Omnis quantitas rationalis multiplicans Binomium per Residuum, producit etiam Binomium vel Residuum eiusdem speciei, ac multiplicato commensurabile. Rationalis quantitas a. multiplicet Binomiũ b c. & producat quãtitatem d e. aio, φ d e. Binomiũ est ipsi b c. binomio cõmẽsurabile, & eiusdẽ speciei. Vt si, exẽpli gratia, b c. sit binomiũ primũ: tũc d e. erit binomiũ pᵘ. Sint enim ipsius b c. binomij mẽbra b c. & ex a. in b. fiat d. ex a. in c. fiat e. Sic enim, per primam secũdi, erit d e. totũ, quod fit ex a in b c. Itaque cùm b c. sit binomium primum, erit per diffin. b. maius membrum rationale atque c. reliquum potẽtialiter tantum rationale: Cumq; a. rationalis in singulas b c. quantitates faciat singulas d e. iã per 49ᵃ huius, ipsa d. erit rationalis, & ipsa e. potentia tantùm rationalis: & totum d e. toti b c. commensurabile. Item sit ipsius a. quadratum f. quod rationale erit: atque ipsarum b c. quadrata sint g h. Mox f. multiplicans ipsas g h. producat ipsas k l. eruntq; per coroll. vndecimæ huius, k l. quadrata ipsarũ d e. Cumq; per primam sexti, sit sicut g. ad h. sic k. ad l. erit euersim sicut g. ad excessum, quo excedit ipsam h. sic etiam k. ad excessum, quo excedit ipsam l. Verùm g. ad suum excessum est sicut numerus quadratus ad numerum quadratũ, p 32ᵃ huius: quoniã per diffinitionẽ primi binomij, b. portio excedit c. portionem potentialiter, excessu, cuius radix est commensurabilis ipsi b. Qui excessus est differentia ipsarum g h. & perinde talis excessus se habet ad g. sicut numerus quadratus ad numerum quadratum per 32ᵃ. Igitur k. ad suũ excessũ se habebit sicut nũs quadratus ad numerũ quadratũ.

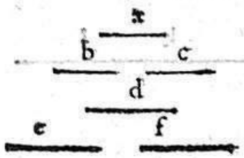
 Quare.



Quare per 53ª ipsa d. potentior erit quàm e. excessu, cuius radix est commensurabilis ipsi d. Cũ ipsarũ d e. potentiæ sint k l. Itaque per diffinitionem totum d e. binomium primum est, ipsi iã b c. cõmensurabile, quod erat demonstrandũ. Similiter pro binomio secundo, & pro tertio procedemus. Et pro quarto & quinto & sexto ostendemus, quòd maior portio potentior est minori in quadrato radicis sibi incõmensurabilis: syllogizãtes per pª sexti, & per portionẽ versam. Sed per 52ª & 53ª adducemus duo corollaria sequẽtia, quæ agũt de incõmensurabilibus: quandoquidẽ, in 4º & 5º & 6º, binomijs, maior portio potentior est minori in quadrato radicis sibi incõmensurabilis. Itẽ pro tertio & sexto binomijs, in quibus portiones sunt potentia tm̃ rationales, ad ostendendã portionũ ipsarum incõmensurabilitatem, citabimus 48ª huius. Similiter, si a. rationalis multiplicet Residuum, cuius membra sunt b c. ac producat d e. ostendemus q̧ d e. est residuum ipsi b c. commensurabile, eiusdem speciei. Quod enim demonstratur de membris binomij, demonstratur de membris correllatiui residui: quandoquidem in diffinitionibus sortiunt easdem conditiones. Recte igitur idem de vtroque proponitur demonstrandum.

PROPOSITIO 63ª.

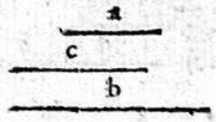
Omnis quantitas Rationalis multiplicans quamlibet irrationalium quantitatum, siue bimembrem, siue eius corellatiuã residualem, producit eiusdem generis irrationalem, ac multiplicatæ commensurabilem. Hæc est generalior præmissa: ibi enim de Binomio, ac residuo: hic vero de qualibet duodecim irrationalium agitur. Itaque sit exempli gratia, rationalis a. quæ multiplicet b. bimediale secundum, & producat c. Aio, q̧ c. est Bimediale secundum & ipsi b. commensurabile. Sit enim ipsius a. quadrato d. quod rationale erit, atque ipsius b. quadratum sit e. quod, per quinquagesimamoctauam huius, erit Binomium tertiũ: Deinde d. multiplicans e. faciat ipsam f. eritq; f. per præcedentẽ, binomiũ tertiũ. Sed per corollariũ 11ᵉ huius f. quadratum est ipsius c. ergo per 57ª huius c. radix ipsius f. binomij tertij, erit bimediale secundum, qd fuit propositum. Eadem penitus argumentatione vteris pro reliquis irrationalium generibus, tam bimembribus, quàm residualibus. Sed in residualibus, pro quinquagesima octaua, & 57 citabis sexagesimam primam, & sexagesimam, quę de residuis loquuntur: itaque constat veritas propositionis.



PRO-

PROPOSITIO 64ª.

Omnis quantitas commensurabilis cuipiam ex irrationalium ordine, est eiusdem generis irrationalis. Et habet eidem proportionalia & commensurabilia nomina. Esto à quantitas, quæpiam, vel potentia tantùm rationalis, vel medialis, vel bimẽbris, siue residualis: ipsiq; a. commensurabilis esto b. Aio, quòd b. est eiusdem generis irrationalis, cuius a. Diuidatur enim b. in ipsam a. & proueniat c. eritque per 51ª huius c. rationalis. Cùm verò quotiẽs in diuisorem producat diuisum, iam c. multiplicans a. facit ipsam b. Rationalis autem c: Igitur per 49ª huius, si a. sit vnimembris quantitas, si bimembris, vel residualis, per præcedentem, erit b. eiusdem generis, cuius a. & eidem commensurabilis: quod est propositum. Quòd autem b. habeat nomina proportionalia & cõmensurabilia nominibus ipsius a. constabit, si qua secatur a. eadem rõne in mẽbra secetur & b. qd erat propositionis reliquũ.



PROPOSITIO 65ª.

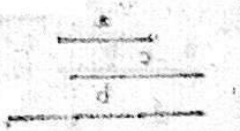
Omnis quantitas irrationalis diuisa per quamuis rationalem, exhibet in quotiente quantitatem sibi cognominem & commensurabilem. Exempli gratia, b. quantitas irrationalis, siue vnimembris, siue bimembris, siue residualis, diuidatur per c. rationalem, & proueniat a. Dico, quòd a. est eiusdem generis, cuius b. & ipsi commensurabilis. Nam cùm diuisor in quotiẽtem producat diuisum: iam c. in a. ducta, faciet ipsam b. Ducatur igitur c. in ipsam d. sibi æqualem, & producat ipsam e. eritque e. rationalis: & per primam sexti, sicut d. ad a. sic e. ad b. Et permutatim, sicut d. ad e. sic a. ad b. Commensurabilis autem est d. ipsi e. quoniam vtraque rationalis. Igitur per 48ª huius, & a. commensurabilis ipsi b. quare, per precedentem, erit & a. eiusdem generis, cuius ipsa b. supponebatur. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO 66ª.

Omnes duæ quantitates inuicem commensurabiles coniunctæ, conficiunt eiusdem generis quantitatem & sibi commensurabilẽ. Sunto a b. quantitates inuicem commensurabiles: Aio, quòd totum a b. erit quantitas eiusdem generis, & vtrique ipsarum a b. commensurabilis. Quòd enim a b. totum ipsis a b. singulis est commensurabile, constat, per quadragesimam sextam huius. Quòd autem eiusdem generis cum ipsis. constat per pręmissam sexagesimam quartam: constat ergo totum propositum.

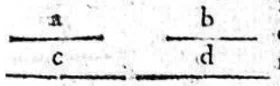
Ff 2 COROL-

COROLLARIVM.



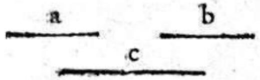
Vnde manifestum est, quòd aggregatum ex quotcunque quantitatibus inuicem commensurabilibus, est singulis partibus commensurabile & eiusdem generis cum eisdem.

PROPOSITIO 67ª.



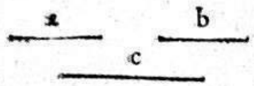
Omnis quantitas potentialiter commensurabilis alicui ex irrationalibus, est eiusdem generis quantitas. Sit exempli gratia, quantitas a. bimediale secũdum: sitq́; ipsi a. potentialiter cõmensurabilis ipsa b. Aio, quòd b. est etiam bimediale secundum. Sunto enim quadrata ipsius a. ipsa c. atque ipsius b. ipsa d. Eritque, per 58ª huius, c. binomium tertium: commensurabilis autem est per hyp. ipsi c. ipsa d. Igitur per 64ª huius d. binomium tertium est. Sed ipsius d. radix ipsa b. est. Ergo, per 57ª b. bimediale secundum erit. quod fuit demonstrandum. Similiter in cæteris irrationalibus, tam bimembribus, quàm residualibus constabit propositum.

PROPOSITIO 68ª.



Omnis quantitas potentia rationalis multiplicans aliquam ex irrationalibus, producit eiusdem generis quantitatem. Exempli gratia, a. quantitas potentia rationalis multiplicet b. bimediale secundum, & producat c. Aio, quòd c. est bimediale secundum. Nam, per diffi. multiplicationis, sicut est a. multiplicans ad positam rationalem, sic c. productum ad b. multiplicatam. Sed a. potentialiter commensurabilis est positæ rationali per hyp. igitur per 48ª huius & c. ipsi b. potentialiter commensurabilis est. Cumq́; b. sit bimediale secundum, erit, per præcedentem, & c. bimediale secundum. quod fuit ostendendum. Non aliter in singulis cæteris vtriusque ordinis irrationalibus constat propositum.

PROPOSITIO 69ª.

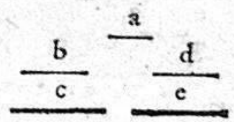


Omnis quantitas irrationalis diuisa in quantitatem potentia rationalem, exhibet in quotiente quantitatem sibi cognominem. Exempli gratia, quantitas a. potẽtia tm̃ rationalis, diuidat b. bimediale primum, & proueniat c. aio, q̃ c. est bimediale primum. Nam per diffin. diuisionis, sicut est diuisor ad positam rationalem, sic est b. diuisa, ad c. quotientem. Sed a. potentialiter commensurabilis est positæ rationali per hypotesim: ergo & b. potentialiter commensurabilis

est

est ipsi c. per 48ª huius. Sed b. bimediale primum. Igitur vt c. bimediale primum per 66ª præmissam. quod fuit ostendendum. Et eodem syllogismo per singula irrationalium genera repetito, constat propositum.

PROPOSITIO 70ª.



Duæ quantitates bimembres eiusdem generis inuicem commensurabiles, per ordinem sex irrationalium sumptæ, inter se multiplicatæ, producunt singulas binomij species. Quod 58ª propositio de quadrato, hæc de producto irrationalium concludit. Sunto, exempli gratia, a b. singulæ quantitates bimedialia secunda, inuicem commensurabilia. Quarum punctum sit c. aio, quòd c. est binomium tertium. Sit enim ipsi æqualis quantitas d. & ex a. in d. fiat e. Eritq́; e. quadratum ipsius a. & perinde binomium tertiũ per 58ª huius. Et quoniam, per primam sexti, sicut b. ad d. sic c. ad e. & ipsa b. ipsi d. per hyp. commensurabilis est. idcirco, per 48ª huius, & c. ipsi e. commensurabilis erit: Sed e. binomium tertium: ergo, per 64ª & c. binomium tertium est. quod fuit demonstrandum. Quòd si a b. ponantur binomia commensurabilia, erit c. binomiũ primũ. Si autem a b. bimedialia prima commensurabilia: hinc c. binomium secundum. Si maiores, binomiũ quartum. Si potentes rationale ac mediale, binomiũ quintum: si potentes duo medialia, binomium sextum esse demonstrabitur: sicut propositio concludit.

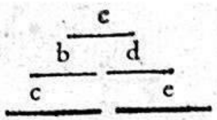
PROPOSITIO 71ª.

Duæ quantitates residuales eiusdem generis inuicem commensurabiles, per ordinem sex generum sumptæ, inter se multiplicatæ, producunt singulas residui species. Quod 61ª propositio de quadrato, hæc præsens de producto residualium concludit. Itaque sicut præcedens ostensa est per 58ª & 48ª & 64ª. ita præsens propositio per 61ª 48ª & 64ª eodem processu & descriptione demonstrabit.

PROPOSITIO 72ª.

Duæ quantitates bimembres eiusdem generis potentialiter inuicem commensurabiles, inter se multiplicatæ, producunt binomia. Exempli gratia, sunto a. & b. bimedialia secunda potentialiter inter se commensurabilia, & ex a. in b. fiat c. aio, quòd c. binomium est. Ponatur enim d. ipsi æqualis, & ex a.

in d.



in d. fiat e. quod per 58ª erit binomium. Verùm per primam sexti, sicut b. ad d. sic c. ad e. & b. commensurabilis potentialiter ipsi d. igitur, per 48ª & c. commensurabilis potentialiter ipsi e. Sed e. binomium: ergo, per 67ª huius, c. binomium erit: quod fuit ostendendum. Similiter siue a b. sint binomia, siue bimedialia prima, siue ex tribus generibus reliquis esse supponantur, semper c. binomium demonstrabitur.

PROPOSITIO 73ª.

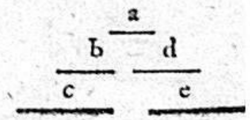
Duæ quantitates residuales eiusdem generis inuicem potentia commensurabiles, inter se multiplicatæ, residuum producunt. Exempli gratia, a. & b. residua medialia secunda inuicem potentialiter commensurabilia: & ex a. in b. fiat c. Aio, quòd c. residuum est. Ostenditur hęc omnino sicut præcedens: hoc excepto, quòd pro 58ª, citanda est 61ª, quippe quæ de residualibus agit.

PROPOSITIO 74ª.

Omne binomium in Residuum eorundem nominum multiplicatum, producit quantitatem rationalem. Esto binomium, cuius maius membrum a b. minus verò b c. Mox ipsi c b. æqualis esto b d. eritque ad residuum eorundem nominum, hoc est excessus eorundem membrorum. Itaque ostendendum est, quòd si c a. binomium multiplicetur in a d. producetur quantitas rationalis. Cum enim a c. sit aggregatum quantitatum duarum a b. b c. atque a d. sit differentia eorundem, constatque per quintam secundi Elementorum, quòd ex ductu aggregati radicum in differentiam eorum producatur differentia quadratorum: Iam illud, quòd fuit ex a c. in ipsam a d. erit excessus, quo □. ipsius a b. excedit quadratum ipsius b c. Verùm, per diffin. binomij huiusmodi quadrata rationalia sunt; igitur talis excessus rationalis est. Quare rationale est, quod fit ex a c. in a d. quod fuit demonstrandum.

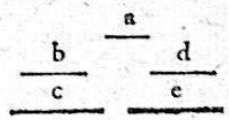
PROPOSITIO 75ª.

Omne binomium in Residuum proportionalium & commensurabilium nominum multiplicatum, producit quantitatem rationalem. Sunto duo binomia & residuum a. & b. quorum nomina maius maiori, & minus minori proportionalia



sint & cõmensutabilia, & ex ductu a. in b. fiat c. Aio, quòd c. rationale est. Ponatur ipsi binomio æqualia nomina habens d. residuum: & ex a. in d. fiat e. quòd per præcedentem erit rationale. Cum autem b d. sicut residua proportionalium & commensurabilium nominum, erunt b d. inter se commensurebilia: sed per primam sexti, sicut b. ad d. sic c. ad e. Igitur per quadragesimam octauam huius, c. commensurabilia ipsi e. Cumque e. sit rationalis, erit & c. rationalis. Sicut demonstrandum fuit.

PROPOSITIO 76ª.



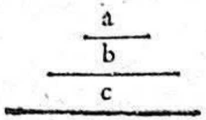
Si Binomium multiplicans aliquam quantitatem, produxerit quantitatem rationalem: multiplicata quantitas residuum est, cuius nomina proportionalia, & commensurabilia sunt binomij nominibus. Binomium a. multiplicet b. quantitatem, & producat c. rationalem. Aio, quòd b. Residuum, est cuius nomina proportionalia sunt & commensurabilia ipsius a. binomij nominibus. Ponantur enim d. Residuum eorundem nominum, siue commensurabilium, & proportionalium cum nominibus a. binomij. & ex a. in d. fiat e. eritque per præcedentem, vel ante præmissam ipsa e. Rationalis. Sed per primam sexti, sicut c. ad e. sic c. ad d. commensurabilis: est autem c. ipsi e. quia sunt rationales. Ergo per quadragesimam octauam huius, b. commensurabilis ipsi d. Fuit autem d. residuum: igitur per 64ª & b. residuum & commensurabilium nominum ipsi d. Sed nomina ipsius d. commensurabilia nominibus ipsius a. binomij, & proportionalia: itaq; & ipsius b. residui erunt eisdem commensurabilia & proportionalia: quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO 77ª.

Si Residuum multiplicans aliquam quantitatem fecerit quantitatem rationalem, multiplicata quantitas binomium est, cuius nomina proportionalia sunt, & commensurabilia residui nominibus. Hæc in eadem omnino descriptione, & eodem processu demonstratur: Hoc excepto, quòd vbi ponebatur binomium, ponatur residuum, & è contrario.

PROPOSITIO 78ª.

Omnis rationalis quantitas diuisa in binomium, exhibet in quotiente residuum, cuius nomina commensurabilia sunt, & proportionalia ipsius binomij nominibus. Exempli gratia, rationalis quantitas c. diuidatur per a. binomium, & proueniat b. Aio, quòd b. residuum est, cuius nomina commensurabilia sunt & proportionalia ipsius a. binomij nominibus. Nam cùm diuisor a. in quotientem b. producat diuisam c. sitque binomium, & c. rationalis: iam, per 76ª præcedentem, b. residuum erit nominum commensurabilium & proportionalium ipsius a. binomij nominibus. quod est propositum.

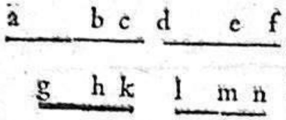


PROPOSITIO 79ª.

Omnis rationalis quantitas diuisa in residuum, exhibet in quotiente binomium, cuius nomina incommensurabilia sunt & proportionalia ipsius residui nominibus. Sicut præcedens per 76ª præmissam, ita præsens per 77ª demonstratur.

PROPOSITIO 80ª.

Binomia, quarum radices habent inuicem proportionalia & commensurabilia nomina, sortiuntur quoque proportionalia inter se & commensurabilia nomina. Sint, exempli gratia, a b c. d e f. binomia tertia, quorum maiora membra a b. d e. minora verò b c. e f. deinde sumantur horum binomiorum radices. sitq; ipsius a b c. radix g h k. & ipsius d e f. radix l m n. per 57ª huius eruntque per eandem g h k. l m n. bimedialia secunda: Sint ergo talium bimedialium membra, maiora quidem g h. l m. minora verò h k. m n. Et supponatur vt g h. ipsi l m. Atque h k. ipsi m n. comparatum, proportionalia sint & commensurabilia. Dico hinc, quòd & binomiorum a b c. d e f. ipsum membrum a b. ipsi d e. atque ipsum b c. ipsi e f. comparatum, proportionalia sunt & commensurabilia; quod sic ostenditur. Quoniam quantitas g k. l n. habent membra commensurabilia, & proportionalia, maius maiori, & minus minori, erunt coniunctim & totum toti proportionalia, & per quadragesimam octauam huius, commensurabilia. Igitur, per quinquagesimam secundam huius, ipsorum g h. l n. quadrata, scilicet, a c. d f. erunt sicut numerus quadratus ad numerum quadratum inter se, & ideo commensurabilia: & idcirco per sexagesimam



gesimam

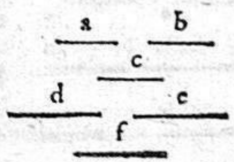
gesimamquartam huius, habebunt membra inuicem proportionalia & commensurabilia, scilicet a b. ipsi d e. atque b c. ipsi e f. quod est propositum. Similiter in cęteris binomiis, & eorum radicibus constabit id, quòd demonstrandum proponitur.

PROPOSITIO 81ª.

Residua, quorum radices habent inuicem proportionalia & cōmensurabilia nomina, sortiuntur etiam proportionalia inter se et commensurabilia nomina. Quod in præcedenti de binomijs eorumque radicibus, quæ sunt bimembres quantitates, ostensum fuit: hic similiter penitus demonstrabitur de residuis, eorumque radicibus, quæ sunt Residuales quantitates. Quandoquidem eadem sunt Residualium, quæ Bimembrium nomina; quæ coniuncta, bimembres; ablata vero minus à maiori residuales quantitates faciunt.

PROPOSITIO 82ª.

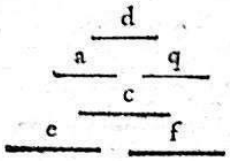
Omnis irrationalis bimembris quantitas multiplicans residualem quantitatem eorundem, siue proportionalium & commensurabilium nominum, producit quantitatem potentia rationalem, & quandoque rationalem. Sunto, gratia exempli, a. bimediale secundum: & b. residuum mediale secundum eorundem, siue proportionalium & commensurabilium inuicem membrorum: multiplicet autem ipsa a. ipsum b. & producat c. Aio, quòd c. est potentialiter rationalis, siue quandoque simpliciter rationalis. Quod sic patet. Sit ipsius a. quadratum d. & ipsius b. quadratum e. Eritque per 58ª huius, d. binomium tertium. Atque e. residuum tertium per 61ª fiat: ergo ex d. in e. quantitas f. Et quoniam a b. habent per hyp. proportionalia & commensurabilia inuicem nomina: iam eorum quadrata d e. per prȩcedentem & antepræmissam habebunt inter se proportionalia & commensurabilia nomina. Quamobrem, per 74ª, vel 75ª huius, d. binomium multiplicans e. binomium, producit quantitatem rationalem. Igitur f. rationalis est, & ideo c. quæ per corollarium 11ᵉ. huius, est radix ipsius f. potentialiter rationalis est. Et si f. fuerit quadratus numerus, tunc & c. magnitudine rationalis erit. quod fuit demonstrandum. Similiter idipsum



sum

sum de quauis bimembri quantitate, suaque residuali ostendetur sicut propoponitur.

PROPOSIDIO 83ª.



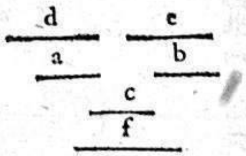
Si binomium secetur per Residuum proportionalium & commensurabilium nominum, proueniet ex diuisione Binomium primum. Esto a. residuum. b verò binomium: quorum nomina nominibus proportionalia & commensurabilia, maius maiori, & minus minori. Secetur autem b. in ipsum a. & proueniat c. Aio, quòd c. binomium primum erit. Ponatur enim d. binomium, cuius nomina ipsius a. residui nominibus, singula singulis sint æqualia: & ex d. in a. proueniat e. eritque per septuagesimamquartam harum, e. rationalis. Item ex d. in b. fiat f. eritque, per septuagesimã præmissam f. binomium primum: quandoquidem d b. sunt binomia inuicem commensurabilia. Cumque per primam sexti, sicut a. ad b. sic e. ad f. Iam idcirco, si secetur f. in e. proueniat c. quæ proueniebat ex diuisione ipsius b. in a. Verùm e. rationalis fuit, atque f. binomium primum: igitur & c. per sexagesimamquintam huius, binomium primum erit. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO 84ª.

Si residuum secetur per binomium proportionalium & commensurabilium nominum, proueniet ex diuisione residuum primum. Hæc præsens ostenditur similiter per eadem, sicut præmissa: sed vbi in præmissa ponitur residuum, hìc ponatur binomium, & è contrario: & pro 70ª citetur 71ª, quæ loquitur de residualibus. Quibus exceptis descriptio est eadem.

PROPOSITIO 85ª.

Si quælibet bimembris quantitas secetur per residualem quantitatem proportionalium & commensurabiliũ nominum, proueniat ex diuisione tali Binomium. Exempli gratia, sit a. Residuũ mediale secundum atque b. bimediale secundum proportionalium inuicem, & commensurabilium membrorum. Deinde secetur b. in ipsum a. & proueniat c. Aio, quòd c. binomiũ erit. Sunto enim ipsorum a b. quadrata d e. eritque per 61ª d. residuũ tertium, & per 58ª e. binomium tertiũ: per 80ª & & 81ªᵐ præmissas proportionalium & commensurabilium nominum. Itaque secetur e. in d. & proueniat f. eritque per ante-



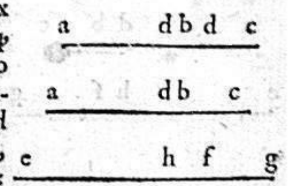
antepremissam f. binomium primum. Sed per corollar. 11ᵐ huius, ipsius f. radix est c. igitur per 57ª huius c. binomium est, quod est propositum. similiter, si a. quæcunque residualis, & b. eius bimembris quantitas proportionalium & commensurabilium membrorum supponatur, semper c. binomium erit. Sicut demonstrandum proponitur.

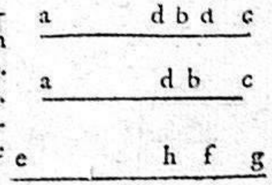
PROPOSITIO 86ª.

Si quælibet residualis quantitas secetur per bimembrem quantitatem proportionalium & commensurabilium nominum: proueniet ex diuisione tali residuum. Ostendetur hæc non aliter, quàm præcedens. Sed vbi in præmissa proponitur residualis quantitas, hìc ponatur bimembris, & è contrario: & pro 82ª & 57ª citandæ sint, 83ª & 60ª, & descriptio maneat eadem.

PROPOSITIO 87ª.

Impossibile est, binomium alibi, quàm in suo puncto diuidi, seruata membrorum diffinitione. Esto binomium constans ex membris a b. maiori, b c. minori, vt diffinitio exigit. Aio, quod impossibile est ipsum a c. binomium alibi, quàm in puncto b. secari, vtpote in puncto d. ita vt a d. d c. membra sint rationalia & potentialiter tantum commensurabilia. Quod sic constat. Sit binomium a c. primum, secundum, quartum, vel quintum: in quo vna portionum a b. b c. rationalis est: & tunc, si punctum d. fuerit in portione rationali, erit iam portio a d. rationalis: sed d c. bimembris, nam constabit ex d b. rationali, & b c. potentialiter tantum rationali: non igitur erit d c. potentia rationalis, vt postulat binomij diffi. Si verò punctum d. fuerit in portione b c. potentia tantum rationali: cogetur aduersarius facere ipsam a d. rationalem: Vnde b d. rationalis erit, cùm a b. sit per hyp. rationalis. Sed b c. potentia tantùm retionalis: ergo d c. residuum, & nequaquam potentia rationalis. Hoc autem pro binomiis primo ac quarto, in quibus portio maior a b. rationalis supponitur. Pro secundo aũt ac 5º in quibus b c. portio minor rationalis supponitur transferes syllogismum. Pro tertio autem & sexto binomijs, in quibus vtraque portio potentialiter tantum rationalis est, sic procedam.

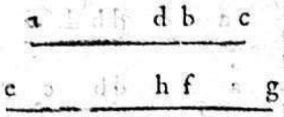




Ponantur

Ponantur membrorum a b. b c. quadrata simul sumpta conficere quantitatem e f. duplum autem eius, quod fit ex a b. in b c. sit quantitas f g. Vnde per quartam secundi Elementorum, totum e g. erit quadratum ipsius a c. vnde, cum a c. sit binomium, erit, per 58ª huius, e g. binomium primũ. Itaque si a b c. binomium suscipit in alio, quàm b. puncto, vt in d. diuisionem: tunc aggregatum quadratorum a d. d c. sit e h. eritque reliquum h g. duplum eius, quod ex a d. in d c. Cumque ex demonstratione 58ª huius, e h. h g. sint membra ipsis e g. binomij: sequetur, vt ipsum e g. binomium primum secetur in alio, quàm f. puncto: quod dudum impossibile ostensum fuit. Quæ demonstratio non solùm pro tertio, & sexto, sed etiam pro cęteris inseruit binomijs.

PROPOSITIO 88ª.

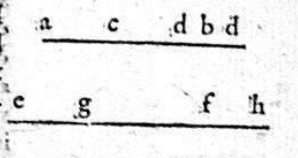


Impossibile est, quamlibet cæterarum quinque bimembrium quantitatem alibi quàm in suo termino distingui, seruata diffinitione. Quod de binomio præmissa concludit, hoc præsens de bimediali primo, secundo, cæterisque tribus irrationalibus proponit. Sit in exemplum a b c. bimediale secundum: cuius maius membrum a b. minus autem b c. Aio, quòd impossibile est ipsum a c. bimediale secundum, alibi quàm in puncto b. vt pote in puncto d. ita secari, vt a d. d c. portiones sint eiusdem diffinitionis, cuius erant ipsæ a b. b c. Quod sic constat. Ponatur ipsius a b c. bimedialis secundi quadratum e f g. ita, vt e f. sit cumulus ex quadratis a b. b c. & f g. duplũ producti ex a b. in b c. eritque ex demonstratione 58ª huius, e g. binomium tertium, cuius membra e f. f g. Quòd si a b c. bimediale secundum alibi quàm in b. puncto, vt in d. patitur diuisionem: tunc per 57ª ponetur aggregatum ex quadratis a d. d c. ipsum e h. & residuum f g. duplum eius, quod ex a b. in b c. ita vt ipsum e g. binomium tertium alibi, quàm in f. puncto in membra suæ diffinitionis distinguatur, quod, per præcedentem, est impossibile. Et perinde impossibile erit ipsum a b c. bimediale secundum alibi quàm in b. puncto distingui. quod fuit propositum. Quod & de reliquis residualibus similiter constabit.

PROPO-

PROPOSITIO 89ª.

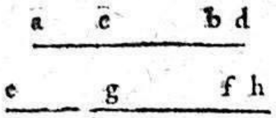
Impossibile est residuum esse excessum aliorum, quàm suorum membrorum, seruata eius diffinitione. Sunto residui mẽbra, maius quidem a b. minus verò b c. ita vt eorum excessus a c. sit ipsum residuum. Aio igitur, quòd a c. non potest esse excessus aliorum membrorum quàm a b. b c. ita vt membra talia sint rationalia, & potentialiter commensurabilia. Sint enim, si possibile est, talia membra a d. d c. vt eorum excessus; sit dictum a c. residuum. Et tunc si maius membrum a d. sit rationale, sicut in primo, vel quarto residuo, cum & a d. vt supponitur, rationale sit; erit eorum differentia b d. rationalis: verùm b c. potentia tantùm rationalis per diffinitionẽ binomij primi vel quarti. Igitur d c. binomium est, non autem potentia rationalis, quod est supposito contrarium. Astruitur ergo propositum. Quòd si minus membrum b c. sit rationalis, vt in secundo, & quinto residuo, tunc rursus b d. rationalis: sed a b. potentia tantùm rationale, per diffin. secundi, vel quinti binomij: ergo a d. binomium, non potentialiter rationalis est. Quod supposito contradicit. Constat igitur proposita impossibilitas: & hoc, quando a d. ponitur maior, quàm a b. Quando verò minor, scilicet cùm punctum d. ponitur inter puncta b c. tunc arguetur similiter, vel a d. vel d c. esse residuum: quod similiter supposito aduersarij refragatur. Sic quo ad primum, secundum, quartum, & quintum residuum, constat propositum. Quo ad tertium verò, sextumque residuum, sic procedam. Ponam e f. aggregatum ex quadratis ipsarum a b. b c. Item f g. duplum eius, quod fit ex a b. in b c. Eritque per quinquagesimam nonam huius, e g. quadratum ipsius a c. siue, quod idem est, a c. radix ipsius e g. Cumque a c. sit tertium, vel sextum residuum, erit, per sexagesimamprimam e g. residuum primum. Itaque, si a c. residuum fit per alia, quàm a b. b c. membra, vtpote per a d. d c. tunc aggregatum ex quadratis ipsorum a d. d c. sit e h. duplum verò eius, quod ex a d. in d c. sit h g. Cumque ex demonstratione sexagesimæprimæ, tunc ipsius e g. residui primi membra sint e h. h g. sequitur, vt ipsum e g. residuum primum constet per excessum



aliorum

aliorum, quàm e f. f g. membrorum: quod dudum impossibile fuit ostensum. Quę demonstratio non solùm tertio & sexto, sed etiam cæteris residuis vsu venit. Sic constat penitus, quod proponitur.

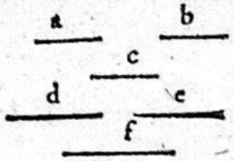
PROPOSITIO 90ª.



Impossibile est quamlibet cæterarum quinq; residualium quantitatum esse excessum aliorum, quàm suorum membrorum, seruata diffinitione. Quod præmissa de Residuo conclusit, hæc præsens de residuo mediali primo, secundo, cæterisque tribus residualibus quantitatibus proponit. Vt si sit, exempli gratia, Residuum mediale secundum, cuius nomen maius a b. minus verò b c. ita vt residuum ipsum mediale secundum sit a c. Aio igitur, quòd a c. non potest esse excessus aliorum, quàm a b. b c. membrorum, vt puta ipsorum a d. d c. ita vt a d. d c. habeant cõditiones diffinitionis ipsius medialis, quas habent a b. b c. Si enim hoc possibile est: tunc aggregatum ex quadratis ipsorum a b. b c. sit e f. duplum verò eius, quod fit ex a b. in b c. sit f g. Eritque per 59ª huius a c. radix ipsius e g. Cumque a c. sit residuum mediale secundum, erit, per sexagesimamprimam e g. Residuum tertium. Itaque si a c. residuum mediale secundum esse potest excessus aliorum, quàm a b. b c. vt pote ipsorum a d. d c. membrorum: tunc aggregatum ex quadratis ipsorum a d. d c. duplum verò eius, quod ex a d. in d c. sit g h. Eruntque ex demonstratione sexagesimæ primæ tunc ipsius e g. residui tertij membra e h. h g. Quare sequetur, vt ipsum e g. Residuum tertium fiat per excessum aliorum, quàm e f. f g. membrorum: quod per præcedentem impossibile est. Et perinde impossibile erit ipsum a c. Residuum mediale secundum esse aliorum quàm a b. b c. propriorum membrorum excessum, seruatis diffinitionis conditionibus. quod fuit demonstrandum. quæ demonstratio similiter ad reliquas residuales quantitates transfertur. Sic constat penitus propositum.

PROPOSITIO 91ª

Omnis medialis quantitas multiplicans aliquam irrationalem de numero sex generum, siue bimembrem siue residualẽ producit *omnino aliquam de numero earundem.* Exempli gratia: a. quantitas medialis multiplicet ipsam b. maiorem, & faciat c. Aio, quòd c. est vna sex generum, quibus adnumeratur Maior, videlicet aut binomium, aut bimediale primum, aut secundum, & cætera. Ponatur enim ipsius a. quadratũ d. quod erit potentia rationale, per diffinitionem Medialis. Sit etiam ipsius b. quadratum e. quod per quinquagesimam octauam huius erit binomium quartum. Itaque ipsa d. multiplicet ipsam e. & proueniat f. eritque f. per 68ª harum binomium. Sed per corollarium vndecimę huius f. est quadratum ipsius c. Igitur per quinquagesimamseptimam huius c. radix ipsius f. binomij erit vna ex irrationalibus bimembribus sex generum, quod fuit demonstrandum. Similiter si b. ponatur binomium, aut bimediale vtrumlibet, aut altera ex duabus reliquis; semper f. ostendetur esse binomium: & perinde c. vna sex generum bimembrium. Non aliter pro residualibus argumentaberis: sed pro 58ª citabis sexagesima prima: & pro quinquagesima septima citabis sexagesimam, quæ de residuis agunt. Quam ob rem si posuisses b. Minorem, aut qualibet cæterarum quinque residualium, ostendisses f. esse residuum: & perinde c. vnum ex residualium generum numero quemadmodum demonstrandum proponitur.



PROPOSITIO 92ª.

Omnis medialis quantitas diuidens aliquam ex irrationalibus, siue bimembribus, siue residualibus, præstat in quotiente aliquã de numero eorundem. Hæc similiter omnino demonstratur sicut præmissa: verùm, loco sexagesimæ octauæ citabis sexagesimam nonam, quæ loquitur de diuisione. Et pro corollario vndecimæ adduces corollarium duodecimæ, & pro multiplicatione vtere diuisione, sicut proponitur.

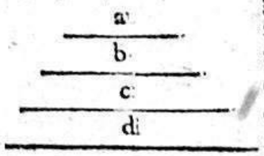
PROPOSITIO 93ª.

Omnis quantitas secundo quadrato commensurabilis alicui irrationali siue de numero bimembrium, siue residualium, est etiã vna de numero earundem. Exempli gratia, sit a. Bimediale primum: & quantitas b. ipsi a. commensurabilis in quadrato secundo. Aio, quòd b. est etiam vna sex generum, ex quibus bimediale primum. Sit e\~m ipsius a. quadratum c. & ipsius b. quadratum

quadratum d. Eruntque c d. potentialiter commensurabiles, quandoquidem earum quadrata sunt secunda quadrata ipsarum a b. per hyp. commensurabilia. Sed c. binomium secundum est, per quinquagesimamoctauam harum : ergo & per sexagesimam septimam binomium erit. Quare ipsius d. radix ipsa b. per quinquagesimam septimam, erit aliqua sex bimembrium. quod erat demonstrandum. Similiter si a. ponatur binomium, vel bimediale secundum, vel aliqua ex tribus reliquis : semper d. binomium esse arguetur, & perinde b. vna sex generum, in quibus binomium numeratur. Eodem syllogismo vteris pro residualibus, dum loco quinquagesimæ octauæ citetur sexagesima prima, & loco quinquagesimæ septimæ vocetur sexagesima, quæ de residuis loquitur, sicut in antepræmissa.

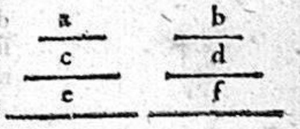
PROPOSITIO 94ª.

Omnis irrationalis quantitas siue de numero sit bimembrium siue residualium, non solùm magnitudine ac potentia irrationalis est, hoc est, quo ad primum quadratum; sed etiam quo ad secundum, quo ad tertium, & quo ad sequentia in infinitũ quadrata. Nam, quo ad binomium primum, secundum, quartum, & quintum, in quibus vna portionum rationalis, reliqua irrationalis est, patet propositum : cùm enim partes sint inter se incommensurabiles, erit per quadragesimam septimam huius, tam congeries, quàm excessus incommensurabilis toti, & perinde totum irrationale : & quoniam excessus incommensurabilis partibus, erit & excessus etiam irrationalis. Quo fit, vt tam binomium, quàm residuum primum, secundum, quartum, & quintum irrationale sit. Sed pro binomio tertio, & sexto, suoque residuo, ac præ cæteris bimembrium, aut residualium generibus sic procedam. Sit a. bimediale primum, aio, quòd a. irrationale est magnitudine. Exponatur enim eius quadratum b. quod per quinquagesimamoctauam huius, erit binomium secundum: sed binomium secundum dudum irrationale fuit. Igitur a. potentia irrationalis est : quare & magnitudine per postremum corollarium quinquagesimæ tertię huius. Et similiter faciam de cæteris generibus tam bimemembribus, quàm residualibus : loco tamen quinquagesimæ octauæ adducta 61ª. Quod autem omnis tam bimembris quàm residualis quantitas.



quantitas sit potentialiter in infinitum irrationalis, constabit sic. Sit talis quantitas a. eius quadratum b. eiusdem quadratum secundum c. eius quadratum tertium d. & deinceps in infinitum. Quando igitur quantitas a. bimembris est, tunc per quinquagesimam octauam b. erit binomium, atque c. & d. cæteraque in infinitum quadrata semper binomia prima. Quę cùm irrationalia sint, constat propositum. Quando verò quantitas a. residualis supponitur, tunc per sexagesimã primã b. erit residuum. Inde autem c. & d. & sequentia semper quadrata residua prima, & perinde irrationalia, quemadmodum demonstrandum proponitur.

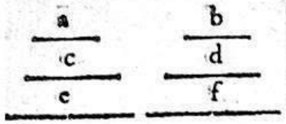
PROPOSITIO 95ª.



Binomium & residuum non solùm inter se magnitudine, sed etiam primo, secundo, & omni deinceps in infinitum quadrato incommensurabilia sunt. Sit a. quoduis binomium. b. autem quodlibet residuum. Aio, quòd a b. & simpliciter, & potentialiter in infinitum incommensurabilia sunt. Nam si b. ipsi a. commensurabilis esset, cùm a. sit binomium, esset & b. binomium per sexagesimam quartam huius : quod est contra hyp. Non sunt igitur a b. commensurabiles, sed incommensurabiles. Deinde sunto ipsorum a b. prima quidem quadrata c d. secunda e f. & deinceps sequentia. Erunq; per quinquagesimam octauam & sexagesimam primam huius, c. binomium, d. autem residuum primi ordinis. Et similiter e. binomium, & f. residuum eiusdem ordinis, quæ sunt inuicem, hoc est, tam c d. quàm e f. & deinceps, incommensurabiles : quoniam scilicet binomium Residuo incommensurabile dudum ostensum est. Igitur potentiæ ipsorum a b. primę, secundæ & sequentes incommensurabiles ad inuicem, sicut proponitur.

PROPOSITIO 96ª.

Bimembris quantitas & residualis non solùm inter se magnitudine, sed etiam potentialiter in infinitum incommensurabiles sunt. Sit a. quęcunque bimembris, b. verò quælibet Residualis. Aio, quòd a b. incommensurabiles ad inuicem sunt: secus enim per sexagesimam quartam huius, essent eiusdem generis : quod est contra hypothesim. Deinde sint ipsorum a b. quadrata prima c d. secunda e f. & deinceps : eruntque per quinquagesimam octauam, & sexagesimam primam c. binomium,

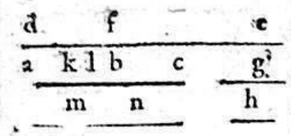


binomium, & d residuum: item e. binomium primum, & f. residuum primum: igitur, per præcedentem, tã ipsa c d. inter se, quàm e f. inter se, & deinceps sequentia inter se, incommensurabilia sunt. Quare ipsorum a b. tam primæ, quàm secundæ, quàm sequentes in infinitum potentia sunt incommensurabiles, sicut demonstrandum proponitur.

COROLLARIVM.

Manifestum est igitur, quòd sicut omnis bimembris de numero sex generum quantitatis, primum quadratum est binomium: secundum verò, tertium & omne sequens in infinitum, semper est binomium primum: ita omnis residualis ex alio senario quantitatis primum quadratum residuum: secundum verò, tertium & quotcunque deinceps, semper est residuum primum. Quod non est parua admiratione dignum.

PROPOSITIO 97.



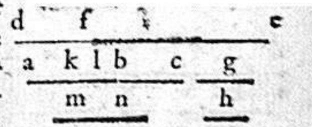
Quadrata portionum irrationalis lineæ bimembris, quæ maior appellatur, sunt binomium & residuum quartæ speciei. Constat hoc apertè in descriptione & theoria quinquagesimę octauę huius, quando a b c. est binomium quartum m n. est maior. fuit autem ibi a k. potentior quàm k l. in eo, quòd fit ex a l. l b. hoc est, in quarta parte ipsius e f. hoc est, in quadrato, quod ex dimidio ipsius b c. quod dimidium incommensurabile est ipsi a k. quoniam eorum dupla, scilicet a b. b c. membra binomij sunt incommensurabilia: quo fit, vt a k. rationalis potentior sit, quàm k l. potentialiter tantùm rationalis in quadrato radicis sibi incommensurabilis: Atque ideo, per diffinitionem, a k l. sit binomium quartum ex membris a k. k l. constans: vtque l b. eorundem membrorum excessus sit residuum quartum. Erat verò a l. quadratum ipsius m. atque l b. quadratum ipsius n. quę sunt membra maioris prędictę, hoc est m. membrum maius: & n. membrum minus. Igitur quadrata talium membrorum, sunt binomium quartum, & residuum quartum. quod fuit demonstrandum.

COROL-

COROLLARIVM.

Vnde manifestum est, quòd tales portiones, quę constituunt Maiorem, sunt etiam ipsę irrationales Maior, & Minor. Hoc est, magna portio est irrationalis, quæ Maior appellatur: parua verò portio, irrationalis, quę Minor dicitur. Nam, cùm quadratum magnę portionis sit binomium quartum, iam per quinquagesimam septimam ipsa magna portio erit irrationalis, quę Maior. Cumque quadratum paruę portionis sit residuum quartum: iam per sexagesimã, ipsa parua portio erit irrationalis, quę Minor. Atque hęc est causa, quòd tales irrationales, Maior, & Minor vocantur: quoniam earum membra singula cadunt sub diffinitionem compositi: vnde & membra singula rursus in portiones homogeneas, & sic deinceps in infinitum (quod mirabile est) secantur.

PROPOSITIO 98.



Quadrata portionum Potentis Rationale, ac mediale sunt Binomium ac residuum aliquando quintæ, aliquãdo sextæ speciei. Nam in descriptione quinquagesimę septimę huius, quando a b c. est binomium quintum, tunc m n. est potens rationale ac mediale. Quadratum autem portionis m. est a l. quadratum autem portionis n. est l b. contigit autem a l. esse binomium quintum vel sextum. atque l b. esse residuum quintum, vel sextum: quod sic patet. Cùm a b c. sit binomium quintum, iam a b. est rationalis potentia tantùm, & idcirco a k. eius dimidium rationalis potentia tantùm. Itaque si k l. sit rationalis, quod tunc contingit, cum d f. est numerus quadratus, & perinde g. ipsius d f. quarta pars numerus quadratus: tunc a l. est binomium quintum. Sit autem k l. sit potentia tantùm rationalis, quando videlicet d f. & perinde ipsius quadrans g. non est numerus quadratus: Tunc k l. est binomium sextum. Et eodem modo variatur l b. de residuo quinto in sextum, cùm sit excessus membrorum dicti binomij. Constat ergo propositum.

 PRO-

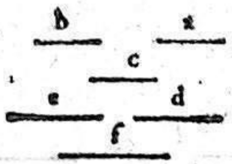
PROPOSITIO 99ª.

Quadrata potentis duo medialia portionum sunt etiam binomium, etiam Residuum, quinque quintæ & quinque sextæ speciei. Hæc constat eodem penitus modo, quo præmissa in eadem quinquagesimæ sextę descriptione.

COROLLARIVM.

Vnde manifestum est, quòd tam potentis rationale ac mediale, quàm potentis duo medialia portiones sunt quinque potens rationale ac mediale: Atque cum rationali mediale potens: & quinque sunt Potens duo medialia: Atq; cum mediali mediale potens. Quod corollarium constat ex quinquagesima septima, & 60ª. & ex duabus præmissis.

PROPOSITIO 100ª.



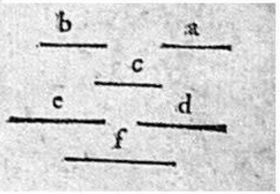
Omnis quantitas potentia rationalis diuisa in binomium, exhibet in quotiente Residuum. Quantitas a. potentialiter rationalis diuidatur per binomium b. & proueniat c. Aio, quod c. residuum est. Sit enim quadratum ipsius a. quantitas d. quę rationalis erit. Item, quadratum ipsius b. sit e. quod per quinquagesimam octauam huius, erit binomium primum. Deinde diuidatur d. per e. & proueniat f. quæ per septuagesimam octauam huius, erit residuum nominum commensurabilium nominibus ipsius e. & proportionalium, & perinde Residuum primum. Sed per corollarium duodecimæ huius f. est quadratum ipsius c. hoc est c. radix est ipsius f. Residui primi: igitur, per sexagesimam huius c. residuum est. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO 101ª.

Omnis quantitas potentia rationalis diuisa in residuum, exhibet in quotiente binomium. Hæc propositio constat eo modo, quo præcedens. Ita vt loco binomij, Residuum; & pro Residuo, binomium ponatur; & pro septuagesima octaua citetur septuagesima nona: quandoquidem d. rationalis diuidenda est per e. Residuum primum. & pro quinquagesima octaua sumatur sexagesima prima, quæ loquitur de quadratis residualium.

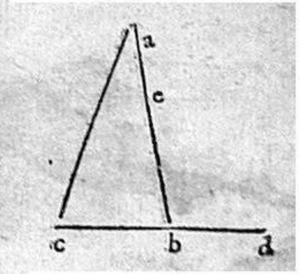
PROPOSITIO 102ª.

Omnis quantitas potentialiter rationalis, diuisa in binominalē, reddit in quotiente residualem correlatiuam: Diuisa verò in residualem, reddit in quotiente binominalem correlatiuam. Idemq; dicendum de quantitate simpliciter rationali. Exempli gratia, Quantitas a. rationalis simpliciter, siue tantum potentialiter, diuidatur per b. bimediale secundum, & proueniat c. aio, quòd c. erit residuum mediale secundum. Sit enim ipsius a. quadratum d. quæ rationalis erit: item ipsius b. quadratum e. quod per sexagesimam primam huius, erit binomium tertium. Deinde secetur d. per e. & proueniat f. Eritq; per septuagesimam octauam huius f. Residuum tertium. Sed per corollar. duodecimæ huius, c. radix est ipsius f. igitur per sexagesimam huius, c. erit Residuum mediale secūdum: quod est propositum. Similiter pro cæteris binominalibus procedemus. Quòd si ponatur quantitas a. rationalis diuidi, exempli causa, per b. residuum mediale secundum, atque ex diuisione prouenire c. eodem modo ostendetur c. esse bimediale secundum: sed tunc, pro sexagesima prima citabitur quinquagesima octaua, & pro septuagesima octaua citabitur septuagesima nona, & pro sexagesima citabitur quinquagesima septima, vt suppositis congruit.

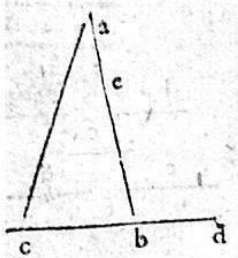


PROPOSITIO 103ª.

Omnis quantitatis secundum extremam, mediamq; rationem diuisæ, vtraque portio Residuum est, maior scilicet quintum, minor autem primum. Agam per lineas, à quibus argumentum transferri potest ad quoduis quantitatis genus. Ponatur linea rationalis a b. quæ perpendicularis sit ad ipsam c b d. sitque b c. dimidium ipsius a b. coniunctaque a c. ponatur ipsi a c. æqualis c d. & abscindatur de ipsa a b. ipsi b d. æqualis b e. Quod fieri potest: nam a b. b c. simul maius sint, quàm a c. hoc est quàm c d. Sit ergo per vndecimam secundi Elementorum, linea a b. secetur in puncto e. Ita vt rectangulum b a. a e. æquale sit quadrato b e. & perinde a b. b e. e a. sint continuè proportionales: hoc est, vt tota a b. ad maiorem portionem b e. talem habeat rationem, qualem ipsa b e. ad minorem portionem e a. Ostendendum itaque est, quòd existente a b. rationali b e.

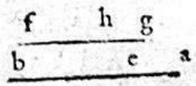


erit Residuum quintum: & e a. Residuum primum, sic. Quoniam a b. dupla est ad b c. ideo quadratum ipsius a b. quadruplum erit ad quadratum ipsius b c. Sed per penultimam primi Elementorum, quadratum ipsius a c. æquale est quadratis a b. b c. simul sumptis. Igitur quadratum ipsius a c. & ideo ipsius c d. quincuplum erit ad quadratum ipsius b c. Cumque b c. per hyp. sit rationalis: erunt d c. potentia tantùm rationalis: & b c. longitudine rationalis: quare, per diffin. harum, excessus b d. Residuum quintum erit: quandoquidem d c. potentior quàm c b. in quadrato lineæ sibi incommensurabili: Igitur & b e. ipsi b d. æqualis Residuum quintum erit. Atque ideo, per sexagesimam primam huius, quadratum ipsius b e. erit residuum primum. Est autem quadratum ipsius b e. æquale rectangulo b a. a e. Igitur quod fit ex b a. in ipsam a e. residuum primum est. Sed quod fit ex b a. in a e. diuisum in b a. rationalem, exhibet ipsam a e. Ergo, per sexagesimam quintam huius, a e. quotiens diuisionis, est commensurabilis & cognominis ipsi diuisæ, hoc est, quod fit ex b a. in a e. quod est residuum primum: Itaque a e. Residuum primum est: quod restabat demonstrandum. Quæ demonstratio, ad omnem quantitatem transfertur: sicut infert propositio.



PROPOSITIO 104ª.

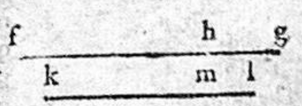
Si maior portio quantitatis secundùm extremam mediamque rationem diuisæ, fuerit rationalis; minor erit Residuum quintum. Sit quantitas f g. vt proponitur, diuisa in partes f h. h g. ponaturque f h. maior portio rationalis. Dico, quòd reliqua g h. erit Residuum quintum. Ponatur enim rationalis quantitas a b. sic diuisa in partes b e. e a. Eritque per præcedentem, maior pars b e. residuum quintum, & reliqua e a. residuum primum. Cumque, propter proportionem similem, sit sicut b a. ad ipsam b e. sic f h. ad ipsam h g. & permutatim, sicut b a. ad ipsam f h. sic b e. ad ipsam h g. atque b a. & f h. sint inter se commensurabiles, quia rationales; erunt per quadragesimam octauam huius, ipsæ b e. h g. inter se commensurabiles: Sed b e. residuum quintum. Igitur per sexagesimam quartam huius, h g. residuum quintum erit. Quod fuit demonstrandum.



PROPO-

PROPOSITIO 105ª.

Si minor portio quantitatis secundùm extremam mediamque rationem diuisæ, fuerit rationalis, minor erit binomium quintum. Sit quantitas f g. vt proponitur, diuisa in partes f h. h g. ponaturque minor portio g h. rationalis. Dico tunc, quòd f h. maior portio erit binomium quintum. Ponatur enim quantitas k l. similiter diuisa, in k m. m l. cuius maior portio k m. sit rationalis: eritque, per præcedentem, l m. reliqua portio residuum quintum. Sed propter similem proportionem, sicut l m. ad ipsam m k. sic g h. ad ipsam h f. Ergo per decimam quintam sexti, quod fit ex l m. h f. æquale est ei, quod fit ex m k. g h. rationale autem, quòd ex m k. g h. quandoquidem ipsæ rationales. Igitur quod ex l m. h f. rationale est. Sic ergo l m. Residuum quintum multiplicans ipsam h f. producit quantitatem rationalem. Quare, per septuagesimam septimam ipsam, h f. multiplicata quantitas erit binomium quintum: quod ostendendū proponebatur.



COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, quòd si tota linea sic diuisa, siue vtralibet portionum ponatur potentia tantùm rationalis, adhuc portiones erunt, quæ dictæ sunt, irrationales, scilicet Residua, & binomium. Nam si duę lineæ, vna rationalis, & altera potentialiter tantùm rationalis sic diuisę fuerint, propter proportionem eandem; portiones huius, portionibus illius; per quadragesimam octauam, commensurabiles potentialiter erunt: & idcirco per sexagesimam septimam, eiusdem generis cum illis. Similiter, si portio maior illius rationalis, ac portio maior huius potentia tantùm rationalis ponatur, tunc reliquę portiones erunt residua. Si verò minor portio illius rationalis, ac minor huius potentia tantùm rationalis sit, tunc maiores binomia erunt: sicut infert corollarium.

PROPOSITIO 106ª.

Si circulus, cuius diameter rationalis circumscribat triangulum, quadratum, & hexagonum æquilaterum: solum latus hexagoni rationale est: latus verò tam trianguli, quàm quadrati

 poten-

Potentialiter tantùm rationale & longitudine incommensurabile ipsius circuli diametro. Patet: nam latus hexagoni æquale est semidiametro circuli circumscribentis, vt in quarto Elementorum ostensum est. Latus autem trianguli potentialiter triplum; latus verò quadrati potentialiter duplum est ad semidiametrum: quæ rationes cùm nequaquàm sint, sicut numeri quadrati ad numerum quadratum, iam per secundum Corollarium quinquagesimætertiæ huius, latera talia incommensurabilia sunt semidiametro, & perinde diametro: sicut proponitur. Talis autem laterum ratio in decimotertio Elementorum commonstratur.

COROLLARIVM.

Et manifestum est simul, quòd latus triãguli ad latus quadrati in eodem circulo descriptorum potentialiter est sesquialterum, & perinde incommensurabile.

PROPOSITIO 107ª.

Si circulus, cuius diameter rationalis circumscribat decagonum, pentagonum, octogonum, atque dodecagonum æquilaterum: tunc latus decagoni erit Residuum quintum, latus pentagoni minor, latus octogoni minor, latus dodecagoni residuũ sextum. De lateribus decagoni, & pentagoni ostensum est in decimotertio Elementorum: de lateribus autem octogoni & dodecagoni ostensum est in speculationibus nostris: sed ex his demonstrationibus hæ regulæ deducuntur.

DE FIGVRIS ÆQVILATERIS REGVLAE.

QVando triangulum, quadratum, hexagonum, decagonum, pentagonum, octogonum, dodecagonum in circulo, cuius diameter rationalis, describuntur, hæ sunt regulæ inueniendi huiusmodi figurarum latera singula.

Quadratum lateris trianguli triplum est ad quadratum semidiametri.

Quadratum lateris quadrati, hoc est, ipsum quadratum descriptum, duplum est ad quadratum semidiametri.

Latus hexagoni æquale est ipsi semidiametro.

Latus

Latus decagoni est residuum quintum, cuius maior portio potentialiter sesquiquarta est ad semidiametrum. Minor verò portio est dimidium semidiametri.

Quadratum lateris pentagoni est residuum quartum, cuius maior portio est dupla sesquialtera ad quadratum semidiametri: minor verò portio potentialiter sesquisquarta ad quadratum semidiametri. Vnde latus ipsum linea irrationalis erit, quę, MINOR.

Quadratum lateris octogoni est etiam Residuum quartum, cuius maior portio dupla est ad quadratum semidiametri: minor verò portio potentialiter dupla ad quadratum semidiametri. Vnde latus ipsum octogoni, sicut pentagoni, irrationalis erit, quæ, MINOR.

Latus dodecagoni est residuum sextum, cuius maior portio potentialiter sesquialtera est ad semidiametrum: minor verò potentialiter sub dupla eiusdem semidiametri.

PROPOSITIO 180ª.

Si sphæra, cuius diameter rationalis, circumscribat quinque solida regularia: tam pyramidis, quàm octahedri & cubi latus potentia tantùm rationale est: ipsiq; diametro longitudine incommensurabile: latus autem icosahedri, minor: latus verò dodecahedri, Residuum sextum. Patet: nam latus pyramidis ad semidiametrum potentia est, sicut 8. ad 3. latus octahedri duplum, latus cubi sesquitertium, latera duorum reliquorum irrationalia, sicut in tertiodecimo Elementorum ostensum est. Vnde regulæ sequentes.

DE SOLIDIS REGVLARIBVS REGVLAE.

QVando Pyramis, octahedrum, cubus, icosahedrum, dodecahedrum in sphæra, cuius diameter rationalis, describuntur; hæ sunt regulę inueniendi huiusmodi solidorum latera singula.

Quadratum lateris pyramidis duplum superpartiens duas tertias est ad quadratum semidiametri.

Quadratum

Quadratum lateris octahedri, duplum est ad quadratum semidiametri.

Quadratum lateris cubi, sesquitertium est ad quadratum semidiametri.

COROLLARIVM.

Vnde manifestum est, quòd latus Pyramidis ad latus octahedri potentia sesquitertium : ad latus cubi : duplum, & latus octahedri ad latus cubi sesquialterum.

Quadratum lateris icosahedri est residuum quartum, cuius maior portio dupla est ad quadratum semidiametri : minor verò portio potentialiter subsesquiquarta ad quadratum semidiametri. Vnde latus ipsum erit irrationalis, quæ Minor.

Latus dodecahedri est Residuum sextum, cuius maior portio est potentialiter superpartiens duas tertias ad semidiametrum ; minor verò portio subtripla eiusdem semidiametri.

Ex quo calculo sequitur, Ingeniosissime Lector, vt sicut quadratum lateris hexagoni, siue semidiametri cum quadrato lateris decagoni coniunctum conflat quadratum lateris pentagoni; sic & in solidis in eadem sphæra descriptis, quadratum lateris pyramidis, cum quadrato cubici lateris simul acceptum, constituit quadratum spæricæ diametri. Item sicut in circulo, semidiametro, siue latere hexagoni secundum extremam, mediamque rationem diuisa, maior portio est decagoni latus : ita in sphæra, latere cubi similiter diuiso, maior portio erit dodecahedri latus. Quæ omnia quamquam demonstrata sunt in Elementis Geometricis, tamen ex ipso calculo apertissimè notescunt. Quorum exempla hìc subijcio.

LATERA

LATERA FIGVRARVM AEQVILATERVM.

Semidiameter circuli—2. Rat^{lis}. $\square$.eius——4

Latus $\triangle^{li}$ ————r.12.Ra.po. $\square$.eius——12

Latus $\square^{ti}$ ————r. 8.Ra.po. $\square$.eius——8

Latus $*^{ni}$ ————2. Ra. $\square$.eius——4

Latus decagoni—r.v. m̄.1. Res.5^{u} $\square$.ci^{9}--6.m̄.r.20.Res p$^{a}_{i}$

Latus ⬠—r.v.--10.m̄.r.20.Minor $\square$.ei^{9}-10.m̄.r.20.Res.4^{u}

Latus 8^{ni}.—r.v—8.m̄.r.32.Minor. $\square$.ci^{9}--8.m̄.r.32.Res.4^{u}

Latus 12^{ni}——r.6.m̄.r.2. Res. 6^{a}.

LATERA SOLIDORVM REGVLARIVM.

Semidiameter sphæræ——2.Rat^{lis} $\square$.eius——4

Latus Pyramidis — r. $10\frac{2}{3}$ Ra.po. $\square$.eius——$10\frac{2}{3}$

Latus Octahedri—— r. 8. Ra.po. $\square$.eius——8

Latus Cubi————r. $5\frac{1}{3}$ Ra.po. $\square$.eius——$5\frac{1}{3}$

L.Icosahedri-r.v. 8.m̄.r. $12\frac{4}{5}$ Minor $\square$.ei^{9}8.m̄.r. $12\frac{4}{5}$ Res.4^{u}

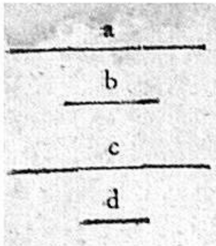
L.Dodecahedri.r. $6\frac{2}{3}$ m̄.r. $1\frac{1}{3}$ Res.6^{u}

Si linea duorũ pedũ secetur secundũ extremã mediamq; rationem, maior eius portio fiet r. 5.m̄.1. Residuum scilicet quintum. Minor vero.3.m̄.r.5. primum. Item si linea r. $5\frac{1}{3}$ similiter diuidatur, maior eius portio erit r. 6. $\frac{2}{3}$ m̄. r. $1\frac{1}{3}$ residuum sextum. Minor verò.r.12.m̄.r.$6\frac{2}{3}$.

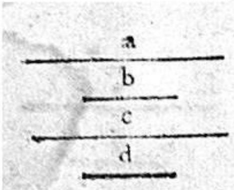
PROPOSITIO 109^{a}.

Si circuli pentagonũ æquilaterũ circũscribentis diameter fuerit linea irrationalis Minor cõmensurabilis minori propriè; tunc latus pentagoni erit Residuum quartum. Si autẽ latus Pentagoni ponatur Rationale; tunc diameter erit irrationalis, quæ Maior. Si demum latus pentagoni ponatur Maior prædictæ

commen-



commensurabilis: tunc diameter erit binomium. Sit a. linea circuli diameter rationalis, b. autem linea latus pentagoni in eo circulo descripti. Eritque per 107ª precedentem, b. minor. Rursum ponatur c. linea minor ipsi b. commensurabilis diametro alterius circuli, & latus pentagoni in circulo c. descripti sit linea d. aio, quòd linea d. est residuum quartum. Cùm enim diametri circulorum sint lateribus similium figurarum circumscriptarum proportionales, erit, sicut a. ad b. sic c. ad d. Quare, quod fit ex a. in d. æquum erit ei, quod ex b. in c. Sed id, quod ex b. in c. est Residuum quartum per septuagesimam primam huius, quoniam b c. sunt minores inuicem commensurabiles: igitur, quod fit ex a. in d. erit Residuum quartum. Cumq; idipsum diuisum in a. rationalem exhibeat in quotiente ipsam d. erit d. per sexagesimam quintam huius, Residuum quartum: & hæc est prima pars propositi. Deinde ponatur d. latus pentagoni rationale: tunc dico, quòd c. diameter circuli circumscribentis ipsum erit maior. Nam propter dictam proportionem diametrorum & laterum, erit, quod fit ex a d. æquum ei, quod ex b c. Rationale est autem, quod fit ex a d. quoniam a d. rationales ponuntur. Igitur rationale est, quòd fit ex b c. sed hoc diuisum per b. Minorem reddit ipsam c. ergo per centesimam secundam huius, c. Maior est ipsius b. Minoris correlatiua. & hoc est, quod secundo loco proponebatur. Demum ponatur d. latus pentagoni Maior, ipsius b. correlatiua, hoc est, commensurabilium & proportionalium nominum: tunc aio, quòd c. diameter circuli circumscribentis ipsum, erit binomium. Namque, vt prius, erit quod fit ex a d. æquum ei, quod ex b c. Sed quod ex a. rationali in d. Maiorem fit, per sexagesimam tertiam huius: Maior est ipsi d. Maiori commensurabilis. Igitur, quod sub b c. Maior est proportionalium & commensurabilium nominum ipsius b. nominibus commẽsurabilium. Verùm hoc diuisum per b. Minorem, per octuagesimam quintam, exhibet binomium, exhibet autem ipsam c. Ergo c. Binomium: quod superarat demonstrandum.



Corol-

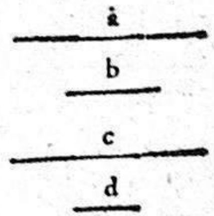
COROLLARIVM.

Quod si pro latere pentagoni, sumatur latus octogoni: vel si pro diametro circuli, sumatur diameter sphære: & pro latere pentagoni latus icosahedri: eadem omnia, quæ proposita & demonstrata sunt, sequentur. Nam, per 107ª precedentem, posita diametro rationali, tam latus octogoni in circulo talis diametri, quàm latus icosahedri in talis diametri sphæra descripti, Minor est, per præmissam, centesimam octauam.

PROPOSITIO 110ª.

Si circuli decagonum æquilaterum circumscribentis diameter fuerit Residuum commensurabile Residuo proprio: tunc latus decagoni erit Residuum primum. Si autem latus decagoni ponatur rationale: tunc diameter erit Binomium: commensurabilium nominum Residui proprij nominibus. Si demum latus decagoni ponatur binomium commensurabilium nominum Residui proprij nominibus: tunc diameter erit binomium primum.

Sit a. linea Circuli diameter rationalis, b. autem linea latus decagoni in eo descripti: eritque, per præmissam 107ª b. residuum quintum. Rursum ponatur c. linea Residuum ipsi b. commensurabile, diameter alterius circuli. Et latus decagoni in circulo c. descripti sit linea d. Dico tunc quòd d. erit Residuum primum. Nam propter proportionem harum quatuor linearum, erit, quod fit ex a d. æquum ei, quòd ex b c. Sed quod ex b c. fit, per septuagesimam primam huius, est Residuum primum: quoniam b c. sunt residua inuicem commensurabilia. Igitur quod fit ex a d. Residuum primum est. Quod diuisum in a. rationalem, cum exhibeat in quotiente ipsam d. Erit d. per sexagesimam quintam huius, Residuum primum. Et hæc est prima pars propositi. Deinde ponatur d. latus decagoni rationale: tunc aio, quòd c. diameter circuli circumscribentis ipsum erit Binomium habens nomina commensurabilia ipsius b. Residui nominibus. Nam propter dictam proportionem diametrorum & laterum, erit quod fit ex a d. æquale ei quod fit ex b c. Rationale est autem, quod fit ex a d. quoniam a d. Rationales ponuntur. Igi-



tur

tur Rationale est, quod ex b c. Sed hoc cùm diuisum per b. Residuum exhibeat in quotiente ipsam c. erit per septuagesimam nonam huius, c. binomium commēsurabilium nominum ipsius b. diuisoris nominibus : quod secundo loco proponebatur. Demum ponatur d. latus Decagoni binomium commensurabilium nominum ipsius b. residui nominibus : Dico tunc, quòd c. diameter circuli circumscribentis ipsum, erit Binomium primum. Nam, sicut antea, erit, quod fit ex a d. ęquum ei, quod ex b c. Sed quod ex a. Rationali in d. binomium sit, est, per sexagesimam tertiam huius, binomium ipsi d. binomio commensurabile: igitur quod sub b c. binomium est nominum commensurabilium ipsius b. Residui nominibus; Cumque hoc diuisum per b. residuum exhibeat in quotiente ipsam c. iampridem per octuagesimam tertiam huius, erit c. binomium primum: & hoc est tertium, quod restabat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quòd si pro latere decagoni, sumatur latus Dodecagoni: vel si pro diametro circuli, sumatur diameter sphęre, & pro latere Decagoni latus Dodecahedri: eadem omnia quę proposita hic & ostensa sunt, similiter sequentur. Nam, per 107^a, posita diametro rationali, latus dodecagoni Residuum sextum. At per 108, latus dodecahedri, adhuc idem residuum est.

Denique tam super lateribus isopleurarum figurarum, tam planarum, quàm solidarum, quàm super earum perpendicularibus, quàm etiam super lineę media extremaque ratione diuisę portionibus possent formari varię ac penè infinitę quęstiones; nunc videlicet circuli diametrum, nunc latera, nūc segmēta supponēdo irrationalia, nunc cuiusuis speciei aut ordinis irrationalia. sic igitur in immensa, atque inextricabilem irrationalium syluam, videlicet trinomia, quadrinomia, mediales secundas, tertias, & cęteras, quę infinitę sunt. Quę tamen ex ipso calculo curiosis notescere possunt. Nobis satis sit hactenus processisse, proximeque

decimi Elementorum demonstrasse, ac multa ab Euclide omissa conclusisse. Cętera relinquo curiosioribus. Sed obscura, minusque necessaria minus curanda sunt. Quod & Cicero in Officiis pręcipere videtur.

Libri secundi Arithmeticorum Maurolyci finis : hora decimaoctaua, diei Sabbati, qui fuit Iulij 24°. Cùm Messanæ cum multo pontis & arcus apparatu expectaretur Io. Cerda, Methynensium Dux, Prorex. Indict. 15.

M. D. LVII.

VENETIIS, M D LXXV.
Apud Franciscum Franciscium Senensem.

INDEX LVCVBRATIONVM.

Euclidis elementa, discussis Interpretum erroribus, tam Campani nimium sibi confidentis, quàm Zamberti professionem Ignorantis. Cum additionibus quarumdam propositionum, præsertim ad regularia solida spectantium.

Theodosij Sphærica elementa libris tribus, astronomiæ principijs necessaria.

Menelai Sphærica libris. 3. multis demonstrationibus adaucta, ad scientiam sphæralium triangulorum pertinentia.

Apollonij Conica elementa libris 4. & demonstrationibus, & lineamentis opportunis instaurata.

Sereni Cylindrica, libris. 2.

Archimedis opera, De dimensione Circuli, De Sphera & Cylindro. De Isoperimetris, De momentis æqualibus, De Quadratura Parabolæ. De spheroidibus & Conoidibus figuris. De spiralibus. Cum additione demonstrationum, facilius demonstrata.

Iordanj Arithemetica, & Data.

Theonis Data geometrica.

Rogerii Bacconis, & Io. Petsan Perspectiuæ breuiatæ cum adnotationibus errorum.

Ptolemei Specula. Et de speculo vstorio libellus.

Autolyci de sphera, quæ mouetur.

Theodosij de habitationibus.

Euclidis Phænomena breuissimè demonstrata.

Aristotelis problemata mechanica, cum additionibus complurimis, & iis, quæ ad pyxidem nauticam, & quæ ad Iridem spectant.

PROPRIA IPSIVS AVTHORIS.

Prologi, siue sermones quidam De diuisione artium, De quantitate, De proportione, De mathematicæ authoribus, De sphæra, De Cosmographia De Conicis, De solidis regularibus, De operibus Archimedis, De quadratura Circuli, De Instrumentis, De Calculo, De perspectiua, De musica, De diuinatione.

Arithmetica speculatiua libris duobus: in quorum primo multa de formis tam planis, quàm solidis numerorum à nemine hactenus animaduersa. In secundo autem theoria & praxis rationalium & Irrationalium magnitudinum per numerarios terminos cum multis nouis, quæ ad decimũ

Euclidis faciunt, demonstrationibus abunde tractatur.
Arithmetica data libellis quattuor demonstrata.
Positionum & rei demonstrationes ad quattuor praecepta vel capita redactae.
Sphaericorum libelli duo. In quibus multa à Menelao neglecta, vel omissa supplentur pro Sphaeralium scientia triangulorum.
Sphera mobilis in octo Capita pro circulis primi motus.
Cosmographia de forma, situ, numeroq; caelorum & elementorum olim Petro Bembo dicata.
Conicorum elementorum quintus & Sextus post quattuor Apollonii libros locandi.
De Compaginatione solidorum regularium.
Quae figurae tam planae, quàm solidae locum impleant, vbi Auerroes Geometriam ignorasse indicatur.
De momentis aequalibus libri quattuor: in quorum postremo de centris solidorum ab Archimede omissis agitur: & de centro solidi parabolici.
De quadrati geometrici, Quadrantis, & Astrolabi speculatione, fabrica, vsuque.
De lineis horariis libri 3. In quibus tota huiusmodi linearum theoria, quo ad situm, colligantiam & descriptionem ipsarum plene tractatur. Nam lineae horariae à meridie coeptae, secant periferiam quandam in iis punctis in quibus eandem tangunt lineae horariae ab occasu vel ortu extensae. Talis autem periferia vel circulus est, uel ex Conicis sectionibus aliqua, scilicet Parabolè, Ellipsis, uel hyperbolè.
Photismi de lumine, & umbra, ad perspectiuam & radiorum incidentiam facientes.
Diaphana in 3. libros diuisa. In quorum primo de perspicuis corporibus. In 2. de iride. in 3. autem de organi uisualis structura, & conspiciliorum formis agitur.
Quaestionum arithmeticarum libelli. 3. Geometricarum libelli 2. Astronomicorum problematum tres: in quibus regulae cum exemplis traduntur.
Adnotationes omnimodae in diuersos Mathematicae locos.
Canones tabularũ Alfonsi, Blanchini Eclipsium, Directionũ primi mobilis.
Compendium Mathematicae breuissimum.
Elementorum Euclidis Epitome cum nouis & artificiosissimis in quintium, in arithmetica, in decimum, & in solidorum libros demonstrationibus.
Conicorum Apollonii breuiarium libris 3. facilius & directe demonstratũ.
Tabula sinus recti supponens sinum maximum siue circuli semidiametrum plurium, quàm millies mille particularum. quod est totius geometrici, astronomiciq; calculi necessarium instrumentum.
Compendium magnae constructionis Ptolomaicae omnium obseruationũ astro-

nomi-

nomicarum seriem paucis comprehendens ex breuiario Io. Regimontii.
Compendium Boetianae Musicae, cum optimis speculationibus & calculo ac modulatuum ratione, & systematum proportione.
Sphera in compendium breuiter omnia comprehendens, cum motuum secundorum Theoria.
Computus Ecclesiasticus breuis & exactus.
Adnotationes in Sphaeram Io. Sacrobusti, & in Theoricas planetarum.
Quadrati, Quadrantis, Astrolabi, instrumenti armillaris & Spharae solidae demonstratio, fabrica, & usus, per nouam, artificiosam, breuemq; ue speculationem.
De lineis horariis regulae breuissimae, & Theoria pro quocunque horizonte.
Compendium Sicanicae historiae.
Martyrologium Sanctorum correctum & instauratum. Cum Topographia & aliis appendicibus.
Hymnorum ecclesiasticorum liber unus.
Carminum & Epigrammatum libelli duo.
Poemata Phocylidis & Pythagorae moralia Latino metro.
Genealogia Deorũ, Io. Boccacii adaucta, cũ multis Illustriũ uirorũ & principum carptim collectis prosapiis ad poesim & historiam necessariis.
Rhythmi vulgari seu uernaculo sermone, in laudem S. Crucis.
Chronologia ab Adamo protoplasto, Christi, principum, praesulum, & notabilium rerum, breuissima.
Itinerarium Syriacum cum historiis ad loca sacra pertinentibus.
Ad Petrum Bembum de Aetneo incendio.
Ad Synodi Tridentini patres epistola.

Breuiaria.

Platinae de uitis Pontificum.
Sex librorum de uitis patrum.
Decem librorum Laertii de uitis Philosophorum.
Petri Criniti de uitis Poetarum.
Octo librorum Polydori de inuentoribus rerum.
Consiliorum Synodalium.
Sex librorum Diodori Siculi.
Grammaticarum institutionum libri sex.
Quadrati horarii fabrica, & usus.

Demonstratio & praxis.

Trium tabellarum sinus recti, beneficae & foecundae, ad scientiam & calculum triangulorum sphaeralium utiles.
Compendium iudiciariae ex optimis quibusque authoribus decerptum in quo de naturis signorum & domorum 12. septemque planetarum co-

 stella-

ſtellationum, aſpectuum, directionum, profectionum, horoſcoporum, electionum, & quæſtionum Regulæ, præſertim ad agricolas, medicos, nautas & milites, & excluſis ſuperſtitionibus, directæ.

Notandum quòd ex ſupra ſcriptis operibus

Theodoſij, Menelai Maurolyci Spherica: Item Autolici Sphæra, Theodoſii de habitationibus, Euclidis Phænomena. Demonſtratio & praxis trium tabellarum ſinus recti, fœcundæ, ac Beneficæ, Compendium Mathemathicæ breuiſſimum ſimul in unum uolumen: Meſſanæ impreſſa fuerunt à Petro Spina filio, Georgii Spinæ Germani. anno ſaluti 1558.

Item

Coſmographia olim Petro Bembo dicata 3. lib. Impreſſa fuit Venetiis apud Iunctas. anno ſalutis 1543. *Et rurſum Baſileæ apud Io. Oponimum.*

Item

Quadrati horarii fabrica & uſus d. Io. XX. Ilio. dicata, venetiis apud Nicolaum Baſſaninum anno ſal. 1546.

Item

Grammatica quædam rudimenta, Meſſanæ per eundem Georgii Spinæ filium anno ſalutis 1528.

Rhythmi quoque materni de laude S. C. ibidē per eoſdē anno ſalutis. 1552.

Item

Martyrologium correctum & inſtauratum Reuerend. domino M. Ant. Amulio Card. dicatum cum opographia cum multis appendicibus. anno ſalutis 1567. *menſe Septembris Venetiis apud Iunctas impreſſum, & iterum in forma parua menſe Iulio.* 1568.

Item

Hiſtoriæ Sicanicæ compendium cū epiſtola ſimul ad patres Tridentinæ Synodi, Meſſanæ impreſſum per eundem Georgii Spinæ filium & nepotes. anno ſal. 1562.

Item

De uita Xpi, eiuſq; matris, & geſtis Apoſtolorum libelli octo ſenariis rythmis uulgaribus. Venetiis per Auguſtinum Bindonum. 1556.

INDEX COPIOSVS IN DVOS LIBROS ARITHMETICORVM,

Alphabetico ordine diſpoſitus.

De litera A.

De litera B.

 ratio-

De litera C.

De litera O.

De litera P.

De litera Q.

De litera R.

De litera S.

De litera T.

Errata sic corrigito.

Fol. 106. uersu ultimo, æquum æquus. 117.28. extrema extremam. 129. 1. Residum Residuum. 154. 50. proueniat. 163. 3. minor maior.